Universidade de Aveiro
2013

Departamento de Educação

Sandra Vanessa da Silva de Jesus

Os números figurados e a sequência de Fibonacci no EB

Universidade de Aveiro
2013

Departamento de Educação

Sandra Vanessa da Silva de Jesus

Os números figurados e a sequência de Fibonacci no EB

Relatório final de Estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico, realizado sob a orientação científica da Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, Professora Auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho à minha mãe…

o júri

presidente

Doutor Rui Marques Vieira
Professor auxiliar da Universidade de Aveiro

Doutora Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge
Professora adjunta do Instituto Politécnico de Castelo Branco

Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
Professora auxiliar da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

À minha mãe, pelo constante incentivo em continuar até ao fim.

Aos meus amigos, por todo o apoio e por ter vivido com vocês grandes momentos.

À minha orientadora, Professora Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, pela disponibilidade, motivação, ajuda e ideias que partilhou comigo.

Às minhas companheiras, Dulce Jesus e Rita Mendes, por esta fabulosa jornada.

Aos professores cooperantes e alunos que participaram neste estudo, pois foram elementos essenciais para a concretização deste trabalho.

À direção da escola, por ter permitido a realização deste estudo.

A todas as pessoas que de certa forma, contribuíram para a concretização desta maravilhosa etapa.

Palavras-chave Pensamento algébrico, números figurados, sequência de Fibonacci.

resumo

Este estudo foi desenvolvido na unidade curricular Pratica Pedagógica Supervisionada B2, que faz parte do curso de Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico e teve como objetivo analisar o pensamento algébrico dos alunos do 5.º ano tendo, também, como finalidade realçar as relações entre a Matemática e a Natureza, fomentando a interdisciplinaridade entre a Matemática e as Ciências Naturais, bem como, entre a História da Matemática, a Língua Portuguesa e a Educação Tecnológica. Para tal, pretendo dar resposta a duas questões de investigação: (I) Quais são as estratégias que os alunos do 5.º ano utilizam para descobrir os termos de uma sequência? (II) Que dificuldades apresentam os alunos do 5.º ano durante a realização de tarefas com sequências e regularidades?

Para isso, foi planificada e implementada uma unidade de ensino sobre o tema “Sequências e Regularidades”. Esta unidade envolve os números figurados e a sequência de Fibonacci e é composta por sete tarefas. A investigação desenvolveu-se num contexto de investigação-ação. As técnicas e instrumentos de recolha de dados foram a observação participante, os registos fotográficos, a análise documental e as notas de campo. O estudo foi concretizado no ano letivo 2012/2013, numa escola básica da região de Aveiro. Os resultados apontam que as atividades desenvolvidas contribuíram para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico destes alunos.

Key words

Algebraic thinking, Figurate numbers, Fibonacci´s sequence.

Abstract

This study was developed in the subject Supervised Pedagogical Practice B2, which is part in course of Primary School Teacher Education (6 to 12 years) and has as objective to analyse the algebraic thinking of students in grade 5 and too aimed to emphasizing the connections between Mathematic and the Nature, promoting the connections between the Mathematic and the Natural Sciences, as well as between Mathematic History, Portuguese Language, and Technological Education. For that, I want to answer two questions: (I) What strategies students in grade 5 use to discover the terms of a sequence? (II) What difficulties reveal the students in grade 5 about the activities with sequences and regularities?

For that, was planned and implemented one unity of education about the theme "Sequences and Regularities". This unity is about figurate numbers and Fibonacci´s sequence and it is compound by seven tasks. The investigation developed in a context of action research. The techniques and tool for data collection were the participant observation, the photographic record, the documental analyses and the field notes. This study was realized in the 2012/2013 school year, in a basic school of Aveiro. The results indicate that the developed activities contribute for the development of algebraic thinking of these students.

"Há um enigma que desde sempre tem perturbado as mentes. Como pode a Matemática, ao fim e ao cabo um produto do pensamento humano independente da experiência, ser tão admiravelmente apropriada aos objetos da realidade?"

Albert Einstein

Índice

Índice das figuras

Lista de figuras:

Lista de apêndices:

Lista de anexos:

Lista de tabelas:

Lista de abreviaturas:

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico.

NCTM – National Council Teachers of Mathematics.

PA – Pensamento Algébrico.

EB – Ensino Básico.

PPS – Prática Pedagógica Supervisionada.

OTD – Organização e Tratamento de Dados.

DGIDC – Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

ME – Ministério da Educação.

Introdução

Durante este ano da minha prática pedagógica supervisionada, ouvi os alunos dizer que não gostam quando as letras se juntam aos números. Isto deve-se, principalmente, ao facto de sentirem dificuldade em compreender o significado dos símbolos, bem como os procedimentos que lhe estão associados, que são diferentes do trabalho realizado nos primeiros anos de escolaridade, no âmbito da Aritmética.

Uma forma de colmatar essas dificuldades é através do trabalho com as sequências e regularidades. Quando apelamos às regularidades no ensino da matemática é porque pretendemos ajudar os alunos a contactar e a aprender uma matemática que se relacione com o seu quotidiano e com as experiências. O estudo das regularidades e sequências vão de encontro a este propósito, pois apoia a aprendizagem dos alunos para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem conjeturas, previsões e generalizações.

Em muitos aspetos do nosso quotidiano somos atraídos para as regularidades. Este é um tópico que faz parte da matemática, dado que podemos afirmar que um dos objetivos desta é "explorar e investigar regularidades". Sequências e regularidades é um dos tópicos essenciais que está previsto no Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), como iremos ver.

Pertinência da investigação e motivações

É essencial o desenvolvimento do Pensamento Algébrico (PA) nas aulas de Matemática. Uma das formas de promover o PA é através do trabalho com sequências e regularidades, como explicarei ao longo deste trabalho. São vários os motivos que me levam a fazer um estudo nesta temática, nomeadamente, o grande gosto e interesse que tenho pela mesma, pois quando contacto com tarefas que envolvam regularidades, manifesto sempre um grande entusiasmo e o facto desta temática fazer parte do PMEB. Para além destas razões, também apresento um facto curioso, que se prende com a Prática Pedagógica Supervisionada (PPS), realizada no 1.º semestre, no 1.º Ciclo, em que o nosso grupo envolveu a escola no Projeto "Ratimat" (projeto na área da matemática). Todas as semanas facultávamos um problema de matemática para os alunos resolverem, alunos estes do 2.º e 3.º ano. Numa dessas semanas, o problema relativo ao 2.º ano era sobre sequências e o enunciado era duas sequências que estavam como exemplo no PMEB, no tema Números e Operações, previstas no 1.º Ciclo, nomeadamente, no 1.º e 2.º ano. Destas duas sequências, os alunos souberam fazer apenas uma delas e este episódio motivou-me para realizar o presente estudo.

Problemática e questões de investigação

Este estudo foi realizado numa turma do 5.º ano e com alunos de outras turmas do mesmo ano. Este inclui uma sequência de tarefas relativas ao trabalho com sequências e regularidades, cujas tarefas possuem um carácter exploratório e transversal a outras disciplinas, nomeadamente, Ciências Naturais, Português e Educação Visual/Educação Tecnológica, dado que a PPS foi realizada no 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico. É importante refletir sobre a importância da interdisciplinaridade e a transversalidade dos conteúdos, pois cada vez mais se apela e faz sentido trabalhar numa comunidade educativa onde todos os membros estejam ligados, principalmente os professores das várias disciplinas, visto que para os alunos, torna-se mais fácil construir conhecimentos quando se verifica uma relação entre eles. Estas tarefas têm como principal objetivo desenvolver o PA. A problemática surgiu com base na revisão da literatura efetuada para esta investigação, nos diálogos com professores e na Prática Pedagógica Supervisionada realizada neste ano letivo, pois os alunos revelam dificuldades ao nível do pensamento algébrico. Segundo Cunha (2010), numa sequência, determinar termos distantes dos termos apresentados é um processo em que os alunos apresentam dificuldades.

Este trabalho teve com finalidade analisar o modo como a resolução de tarefas de exploração de sequências e regularidades contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Consequentemente, propõem-se algumas questões de investigação, tais como:

- Quais são as estratégias que os alunos do 5.º ano utilizam para descobrir os termos de uma sequência?
- Que dificuldades apresentam os alunos do 5.º ano durante a realização de tarefas com sequências e regularidades?

Organização da investigação

Este relatório final de estágio está organizado em 5 capítulos. Inicialmente, abordou-se as motivações que levam a pesquisar e trabalhar este assunto, referiu-se o problema de investigação e propôs-se algumas questões de investigação.

No primeiro capítulo, abordou-se, com base numa pesquisa, alguns aspetos ligados ao PA, nomeadamente, (1) a definição de sequência e de regularidade; (2) onde é que o PA e os conceitos referidos estão previstos no PMEB; (3) a importância das sequências e regularidades; (4) a definição de Álgebra e sua relação com as regularidades; (5) algumas dificuldades geralmente sentidas pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem da Álgebra; (6) as regularidades e o pensamento algébrico; (7) o ensino e a aprendizagem das regularidades; (8) os números figurados; (9) a sequência de Fibonacci e finalmente apresento (10) a adequação didática das tarefas.

O segundo capítulo foi dedicado às opções metodológicas, à recolha de dados e à caracterização do contexto pedagógico e dos participantes do estudo.

No terceiro capítulo apresentou-se a unidade de ensino, onde inclui a apresentação das tarefas, as resoluções e como foram abordadas.

No quarto capítulo foi destinado a análise dos dados e o quinto capítulo às conclusões e uma reflexão de carácter mais pessoal, que explica o que contribuiu para a minha formação pessoal ao longo deste período, pois esta formação não tem fim. O fim deste trabalho será apenas o fim de uma etapa.

Capítulo 1 – Enquadramento teórico

1.1. Definições dos conceitos de sequência e regularidade

Para este estudo considerou-se pertinente apresentar as definições de sequências, regularidades e padrões.

Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2006) na sua investigação pesquisaram na Internet o significado de "padrão" e obtiveram o seguinte, na página: http://www.alamut.com/notebooks/p/patterns.html:

> "Um padrão é uma configuração natural ou casual. Ou é uma amostra de tendências, atos ou características observáveis de uma pessoa, coisa, grupo ou instituição. Quando reconhecemos um padrão num acontecimento ou coisa podemos fazer previsões baseadas nesse padrão. Observando as características num item aquelas podem ser repetidas de modo semelhante ou idêntico noutros itens. Como há uma regularidade, um padrão de uma ocorrência, podemos adivinhar o futuro. Ou mais simplesmente, padrão é uma característica(s) observada num item que se pode repetir de modo idêntico ou semelhante noutro item" (Vale, Palhares, Cabrita e Borralho, 2006, p. 2).

Segundo Vale e Pimentel (2009), quando falamos em padrões, estes são usados quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores, ou sons, onde se detetam alguma regularidade. Pode ser considerado também como uma sucessão de termos que se repetem. O nosso espírito parece estar estruturado para procurar relações e sucessões, a ordem escondida. Orton (2009) mostra que um padrão pode ser considerado como uma ordem, regularidade, repetição, e simetria no meio de objetos matemáticos; já padrão numérico é considerado como uma sequência em que os objetos matemáticos são números. Ponte (2009) afirma que ainda não se conseguiu uma definição consensual de padrão, porque esta noção não é uma noção matemática propriamente dita, pois é transversal aos mais diversos campos, nomeadamente geometria, teoria dos números, álgebra, entre outros, o que faz com que em cada caso, ganhe uma definição própria. Contudo, um termo que aparece frequentemente associado a padrão é regularidade.

Enquanto que o padrão aponta “para a unidade base que eventualmente se replica, de forma exactamente igual ou de acordo com alguma lei de transformação”, regularidade diz respeito à “relação que existe entre os diversos objetos, aquilo que é comum a todos eles ou que de algum modo os liga” (Ponte, 2009, p. 170). Para Vale (2012), o termo padrão usa-se quando procuramos uma ordem ou estrutura e, por isso, os termos regularidade e repetição estão muitas vezes presentes. A ideia fundamental num padrão envolve repetição e mudança. Conseguimos reconhecer um padrão naquilo que vemos ou deduzimos que pode acontecer. Barbosa (2009) define padrão como “todo o arranjo de números ou formas onde são detetadas regularidades possíveis de serem continuadas” (Barbosa, 2009, p. 47). Existem duas tipologias de padrões que são utilizadas e estudadas na matemática escolar: os padrões de repetição e os de crescimento. Das várias ideias expressas pelos vários autores referidos, podemos concluir que ao conceito de padrão estão associadas palavras como: regularidade, sequência, regra e ordem.

Um padrão de repetição é um padrão no qual há um motivo identificável que se repete indefinidamente. Segundo Barbosa (2009), padrão de repetição é “uma sequência de números ou formas na qual se reconhece uma unidade (conjunto de elementos da sequência) que se repete ciclicamente” (p. 47). Vale e Pimentel (2009) apontam como exemplos deste tipo de padrão os dias da semana, o conjunto de figuras AB, AB, AB…, amarelo, azul, amarelo, azul, pum, pam, pum, pam, entre outros, o que corresponde à identificação do motivo que se repete. Barbosa (2009), afirma que neste caso, o padrão tem um motivo de dimensão. Se fosse um padrão abcdeabcdeabcde, tem um motivo de dimensão 5, pois este motivo é abcde. Este motivo que se repete é uma pequena parte do padrão que para além de ser chamada de motivo, também é conhecida como unidade de repetição. Estes padrões podem ser explorados de forma aprofundada, permitindo assim, a entrada na Álgebra, para além da ligação com outros temas, tais como Organização e Tratamento de Dados (OTD), nomeadamente, quando se usam tabelas para observarmos as possíveis regularidades. Vale e Pimentel (2009) afirmam que a identificação do motivo da repetição é importante, dado que possibilita aos alunos a organização do seu pensamento e a distinção entre os padrões de repetição e os de crescimento. O tipo de tarefas possíveis que se podem realizar são: a cópia do padrão, ou seja, reproduzir uma sequência; continuar um padrão em ambas as direcções, tendo em atenção que normalmente continuar um padrão no sentido inverso afigura-se mais difícil para os alunos, já que envolve a reversibilidade do pensamento; identificar o motivo de repetição (unidade que se repete ciclicamente); descrever a relação entre os termos de uma sequência e a sua ordem; completar um padrão, o que inclui preencher espaços vazios não sequenciais; criar um padrão e traduzir um determinado padrão para outro contexto, o que leva os alunos a concluir que a propriedade fundamental do padrão não se altera; identificação da lei de generalização e escrever termos de uma sequência numérica dada a lei de formação. Uma outra estratégia utilizada é a partição do padrão nas unidades de repetição que são associadas a uma ordem e colocadas numa tabela para poder descobrir termos de diferentes ordens e dar posteriormente lugar à generalização, através da análise das colunas. A identificação do motivo de repetição e a compreensão da estrutura do padrão permitem ao aluno a abordagem à generalização distante através da descoberta do termo que ocupa uma dada ordem na sequência, promovendo o caminho para a abstracção, com base na análise das colunas que são originadas a partir do motivo de repetição. Esta estratégia envolve o raciocínio multiplicativo, pois existe uma unidade que se repete.

Quanto aos padrões de crescimento, segundo Vale e Pimentel (2009) estes consistem num crescimento do motivo inicial e cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Barbosa (2009) define como uma sequência de números que se prolonga de forma regular. Estes padrões têm uma importância significativa na descoberta de conceitos, propriedades e resolução de problemas em matemática e permitem uma exploração mais rica e variada. Para esta autora, os alunos tendem a revelar mais dificuldades na exploração de padrões de crescimento relativamente aos de repetição. Na exploração deste tipo de padrões, é frequente a solicitação dos alunos para encontrarem uma relação entre os termos do padrão e que usem esta generalização para gerar elementos noutras posições. Esta abordagem envolve, frequentemente, representações visuais, registo e organização de dados em tabelas e a identificação da relação entre os termos que os constituem. Esta dificuldade que os alunos revelam pode dever-se à falta de experiências com padrões em contextos figurativos ou pode indicar que os padrões de crescimento poderão ser cognitivamente mais difíceis do que os de repetição. Para esta, a situação é preocupante, pois são os padrões de crescimento que permitem a transição da aritmética para a Álgebra. Estes padrões incluem os numéricos, como o caso dos números de Fibonacci, pois representam uma regularidade e é possível identificar o próximo número. Contudo se surgir o padrão 1212121212, apesar de ter números, não é um padrão numérico, pois não se verifica nenhum crescimento, pois é do tipo abababababab, o que significa que é um de repetição.

Por sua vez, a definição de sequência também não é universal. Contudo, apresenta-se apenas a de Orton (2009) e Barbosa (2009) que definem como um conjunto de objetos matemáticos ordenados de acordo com uma regra. Associado ao conceito de sequência temos o conceito de sequência numérica, que é uma lista de números que segue uma regra; termo, que diz respeito a um número, forma ou figura de uma sequência; ordem, que se refere à posição que cada termo ocupa numa sequência. Outro conceito associado é o de lei de formação, que se relaciona com a regularidade seguida pela sequência. Esta consegue-se encontrar através da análise das relações entre os termos apresentados.

1.2. Pensamento algébrico, Sequências e Regularidades no Programa de Matemática do Ensino Básico e nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar

O pensamento algébrico, bem como as regularidades estão referidos no Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB). Estes conceitos estão relacionados com diferentes conteúdos e estão presentes ao longo do PMEB, nomeadamente, nos 3 ciclos do Ensino Básico (EB). Contudo, como este mestrado e esta Prática Pedagógica Supervisionada (PPS) são relativos ao 1.º e 2.º ciclo, serão nestes ciclos que estes fundamentos teóricos irão incidir.

Se analisar o PMEB, este contém quatro grandes temas: Números e Operações, Geometria e Medida, Álgebra e Organização e Tratamento de Dados (OTD).

Logo na introdução deste PMEB, refere: "o programa assume que o ensino-aprendizagem se desenvolve em torno de quatro eixos fundamentais: o trabalho com os números e operações, o pensamento algébrico, o pensamento geométrico e o trabalho com dados. Deste modo, a Álgebra é introduzida como tema programático nos 2.º e 3.º ciclos, e no 1.º ciclo tem já lugar uma iniciação ao pensamento algébrico" (ME, 2007, p. 1). Após a introdução, segue-se as Finalidades do ensino da matemática, onde referencia as regularidades no excerto: "o estudo (…) das estruturas e regularidades, da variação, do acaso e da incerteza. Nesta atividade, a resolução e formulação de problemas, a formulação e teste de conjeturas, a generalização e a demonstração e a elaboração e refinamento de modelos são algumas das suas dimensões principais" (p. 2). Seguem-se os Objetivos gerais do ensino da matemática, onde está explícito "reconhecer regularidades e compreender relações" (p. 4), "explorar regularidades e formular e investigar conjeturas matemáticas", "reconhecer a beleza das formas, regularidades e estruturas matemáticas;" (p. 6). Nos Temas matemáticos (já referimos anteriormente), no 1.º ciclo não surge o tema da Álgebra, embora haja objetivos de cunho algébrico em outros temas deste ciclo e a Geometria está associada à Medida. "As ideias algébricas aparecem logo no 1.º ciclo no trabalho com sequências, ao estabelecerem-se relações entre números e entre números e operações (…). No 2.º ciclo, a Álgebra já aparece como um tema matemático individualizado, aprofundando-se o estudo de relações e regularidades" (p. 7). No tema Números e operações, refere: "a exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números é importante neste ciclo. Os alunos devem procurar regularidades em sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões), e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a geometria e a aritmética. Este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstracção e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico" (ME, 2007, p. 14). No 1.º e 2.º ano, neste mesmo grande tema, no tópico Regularidades, tem na página 17 o ponto intitulado "Sequências", onde os objetivos específicos são: "elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números". Por sua vez, no 3.º e 4.º ano, na página 18 é previsto: "investigar regularidades numéricas e resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional", mais especificamente, em tabelas numéricas e tabuadas.

No tema Geometria e Medida, no 1.º ciclo, não existe nenhum objetivo explícito. Porém, se considerarmos os padrões que envolvem figuras geométricas, podemos afirmar que contém, implicitamente, este tema. Quanto ao tema da Organização e Tratamento de Dados (OTD), aborda as experiências aleatórias como uma forma de procurar regularidades, contudo, podemos considerar as situações em que para analisar melhor as sequências que temos, recorremos às tabelas para podermos explorar melhor as regularidades presentes.

No 2.º ciclo, no tema Números e operações, nas indicações metodológicas, refere: "o trabalho com sequências numéricas em que se pede ao aluno que continue ou invente sequências de números estabelece uma ponte conceptual importante entre os três ciclos do ensino básico" (ME, 2007, p. 32). No que concerne ao tópico "Números naturais", na parte das potências, tem como nota: "estudar regularidades com potências, por exemplo, regularidades do algarismo das unidades de potências com a mesma base e expoentes diferentes" (p. 33). No tema Geometria, nos objetivos gerais de aprendizagem, menciona: "ser capaz de analisar padrões geométricos" (p. 36). No que concerne ao grande tema Álgebra, no início cita: "os alunos no 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos. No 2.º ciclo, ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos" (p. 40). Nesta página está presente o propósito principal de ensino, que passa por desenvolver nos alunos o PA. Quanto aos objetivos gerais de aprendizagem, o que se relaciona com o nosso trabalho é "ser capaz de explorar e investigar regularidades". Nas indicações metodológicas, indica: "a investigação de regularidades, tanto em sequências numéricas finitas ou infinitas (sucessões), como em representações geométricas deve ser tomada como base para o desenvolvimento do pensamento algébrico" (p. 40). Em termos de objetivos, o que o PMEB prevê sobre sequências e regularidades, está no tópico "Relações e regularidades", no ponto Sequências e regularidades: "identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas; determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação; determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação; analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação utilizando a linguagem natural e simbólica" (ME, 2007, p. 41).

A análise deste programa permite que se encontre várias referências aos padrões, com especial relevo para o tema dos Números e Operações e da Álgebra, até às Capacidades Transversais a desenvolver, onde no tópico da Resolução de Problemas se recomenda a apresentação de problemas que possam ser resolvidos por diferentes estratégias, em particular pela identificação de regularidades (p. 46). Estes exemplos são um reconhecimento inequívoco do papel das tarefas com sequências no desenvolvimento do raciocínio e comunicação matemática.

Como podemos verificar, são vários os temas que estão ligados às regularidades e sequências. Estabelecer conexões é um processo cognitivo que envolve criar ligações entre conceitos, procedimentos e experiências. Sem conexões, os alunos recordam um conjunto de factos, conceitos e procedimentos isolados. O estabelecimento de conexões permite construir um novo conhecimento sobre os adquiridos anteriormente, mas de forma integrada. O insucesso em matemática, deve-se em parte, ao facto dos estudantes apelarem à memorização em vez da compreensão.

Segundo Oliveira (2009), a grande novidade deste programa em relação à Álgebra é que nos documentos anteriores (ME, 2001), esta dizia respeito às regras de transformação de expressões algébricas e resoluções de equações. Este PMEB de 2007, olha para a Álgebra como grande tema e apresenta o Pensamento Algébrico (PA), que apesar dos autores do programa não explicarem o que consideram por PA, este termo é usado ao longo do programa e apresenta-se como um dos quatro eixos fundamentais do ensino e aprendizagem da Matemática. Assim, os alunos podem pensar algebricamente mais cedo no seu percurso escolar, podem desenvolver mais cedo a capacidade de generalização. Em relação a esta capacidade, o programa destaca-a na medida em que alguns autores, tais como Kaput e principalmente Mason, afirmam que é um aspeto central no desenvolvimento do trabalho em Matemática, particularmente na Álgebra, que pode ser alcançado através do trabalho com sequências e regularidades e que ajuda a desenvolver a capacidade de abstração, para além do PA.

Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2007), as regularidades também estão previstas, sendo um aspeto relevante para o ensino da Álgebra. Este documento refere que o desenvolvimento de competências com padrões é relevante para a capacidade de resolver problemas; compreender conceitos e relações importantes; investigar relações entre quantidades (variáveis) num padrão; generalizar padrões através do uso de palavras ou variáveis; continuar e relacionar padrões, e compreender o conceito de função. É também referido o contributo do estudo de padrões para a aprendizagem da Álgebra, pois a experiência constante com padrões ajuda a compreender o conceito de função e que a experiência com números e com as suas propriedades pode constituir uma base para um trabalho posterior com símbolos e expressões algébricas. Neste documento é referido que “os programas de ensino desde o pré-escolar até 12.º ano deverão habilitar os alunos para compreender padrões, relações e funções" (NCTM, 2007, p. 39), em que "de início, os alunos poderão descrever verbalmente as regularidades nos padrões, em vez de utilizar símbolos matemáticos. Do 3.º ao 5.º ano, poderão começar a usar variáveis e expressões algébricas para descrever e ampliar padrões. (…) Nos primeiros anos, os alunos poderão descrever padrões como 2, 4, 6, 8, …, determinando a forma de obter o número seguinte, que neste caso é adicionando 2. Isto constitui o início do pensamento recursivo" (p. 40). Mais tarde, podem trabalhar sequências como a de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, onde cada termo é obtido através da soma dos dois anteriores.

Na parte da Álgebra, para os anos compreendidos desde o pré-escolar até o 2.º ano, refere, mais uma vez, que os alunos deverão compreender padrões, relações e funções, mais especificamente, "agrupar, classificar e ordenar objetos por tamanho, número e outras propriedades; reconhecer, descrever e ampliar padrões, tais como sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples e interpretá-los em diversas representações; analisar a forma como são gerados tanto os padrões de repetição como os de crescimento" (p. 104). Na página 105 e 106 refere que mesmo antes do ensino formal, os alunos desenvolvem conceitos iniciais relacionados com padrões, funções e Álgebra. As cantigas e poemas são um bom exemplo de padrões. Os professores deverão ajudar os alunos a chegar ao processo de generalização, através de questões como: como poderias descrever este padrão? Em que é que estes padrões se assemelham?, em que nos dão como exemplo um padrão de cores azul, azul, vermelho, azul, azul, vermelho, que possui a mesma forma que palmas, palmas, passo, palmas, palmas, passo. Esta explicação permite-nos concluir que duas situações diferentes podem ter as mesmas características matemáticas e serem iguais em vários aspetos importantes. Cada um destes padrões pode ser escrito sobre a forma de AABAAB, o que nos leva aos primeiros contactos com a Álgebra. A página 106 apresenta um exemplo de um padrão de repetição, em que o motivo de repetição é o triângulo - pentágono e inclui um conjunto de possíveis questões que podemos colocar aos alunos, tais como: "Qual a segunda forma? Quais são as particularidades dos números que se encontram debaixo dos triângulos? (ímpares) Qual é a forma que o número 14 deverá ter?". O documento indica-nos também que os alunos deverão resolver problemas, e apresenta-nos um exemplo de um problema em que utiliza como resolução uma sequência numérica (padrão de crescimento) e é este: se um balão custa 20 cêntimos, quanto custam 7 balões? Podíamos utilizar a operação de multiplicação, contudo, para os alunos que conhecem a sequência 20, 40, 60, …, e continuarem a adicionar 20, poderão chegar ao custo final dos 7 balões. Os professores devem proporcionar aos alunos experiências que lhes permitam aprender a usar tabelas para a organização da informação. Para além da resolução de problemas envolvendo sequências, na página 107 apelam também a exploração de regularidades em tabelas e apresentam também um conjunto de questões-exemplo, tais como “se contarem de 10 em 10 a partir do número 36, qual seria o número? Se continuarem a contar de 10 em 10, alguma vez parariam no número 87? Porquê? À medida que os alunos fazem generalizações através da observação dos números estarão a construir as bases do PA.

Ainda no tema da Álgebra, para os anos compreendidos entre o 3.º e 5.º ano, incidem também na compreensão de padrões, relações e funções. Contudo, os objetivos para estes anos são “descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos” e “representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos” (p. 182). Na página 183 referem que nestes anos, as noções algébricas vão aparecendo à medida que os alunos identificam ou criam padrões geométricos e numéricos; descrevem padrões oralmente e representam-nos por meio de tabelas ou símbolos e exploram propriedades dos números. Refere também que os alunos nesta fase deverão investigar padrões numéricos e geométricos, analisar a estrutura do padrão, o modo como este cresce ou varia e usar esta análise para generalizar. Para isso, apresentam o exemplo dos quadrados crescentes (números quadrados ou quadrangulares – consultar o tópico “números figurados – origens e propriedades”, onde irão ser abordados), em que o professor poderá pedir aos alunos para que descrevam os padrões que observam nos quadrados crescentes apresentados e para representarem o padrão por meio de expressões matemáticas. Uma das generalizações é que estes números são a soma dos números ímpares consecutivos, ou podem ser vistos como a multiplicação de um número por ele próprio. Estes poderão chegar à expressão algébrica: n^2. Aquando a investigação das regularidades para saber como descobrem vários termos, apraz dizer que é importante organizarem a informação, recorrendo, sempre que necessário, a tabelas e outras formas de OTD.

Por fim, dado que se está num estudo em que a PPS é no 1.º e 2.º ciclo, interessa saber ainda, o que é previsto no 6.º ano. Contudo, a organização deste documento prevê para o 6.º até o 8.º ano. A compreensão de padrões, relações e funções prevalece, porém, o objetivo principal é "representar, analisar e generalizar uma diversidade de padrões, através de tabelas, gráficos, palavras e, sempre que possível, expressões simbólicas" (p. 262). Nestes anos, a incidência passa pelas funções lineares que se verificam quando existe uma taxa de variação constante. "Os alunos deverão resolver problemas, nos quais usem tabelas, gráficos, palavras e expressões simbólicas, para representar e analisar funções e padrões de variação" (p. 263). Contudo, o estudo não irá incidir neste objetivo, pois estes conteúdos são dados mais tarde. Porém, este objetivo permite deduzir que a preferência pelo uso de expressões simbólicas é a grande novidade nesta fase.

Nesta parte destinada à análise do que é previsto nestes dois documentos mostra a grande importância desta temática ao longo do ensino básico, bem como a grande transversalidade e conexões que permite estabelecer com outros temas e conteúdos da matemática, para além das inúmeras atividades que o professor pode/deve realizar com os seus alunos para que desenvolvam o PA e para que estejam preparados para outros conteúdos que surgem em seguimento da abordagem de sequências e regularidades.

1.3. A importância das sequências e regularidades

Para começar a refletir sobre a importância das sequências e regularidades, teve-se em conta alguns documentos oficiais de matemática.

Segundo Vale e Pimentel (2009) e Almeida (2010), as regularidades vão além da mera exploração de situações de repetição e crescimento. A sua essência reside na sua transversalidade com outros temas como das capacidades que promove nos estudantes e na forte ligação que tem com a resolução de problemas e com atividades de exploração e de investigação. Assim, o ensino da matemática, em parte, deve ser orientado para o desenvolvimento das capacidades de generalizar e fundamentar generalizações. Por isso, o trabalho com sequências é essencial, pois ajuda os alunos a procurar regularidades e relações e encoraja-os a generalizar, para além da criação de hábitos de investigação. Para Almeida (2010), "permite preparar os alunos para aprendizagens posteriores, para além do desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação. (…) A utilização de tarefas que envolvam o estudo de padrões é um excelente meio para trabalhar a generalização" (Almeida, 2010, p. 48). A diversidade de conexões que permite com todos os temas da matemática faz com que este tema seja considerado transversal dentro do programa a nível do EB, como por exemplo, em relação ao tema números e operações, relaciona-se com as operações, em que se pode ver as divisões com restos; na geometria, nomeadamente padrões com formas geométricas; na álgebra, onde já vimos inúmeras referências, entre outras. As tarefas de natureza exploratória, principalmente as que envolvem generalização na descoberta e estudo de padrões são uma componente essencial do PA, para além da motivação para a própria aprendizagem da Matemática.

A generalização é considerada pelo NCTM (2007) como uma das principais finalidades do ensino da Matemática. Neste sentido, os padrões, constituem um ótimo contexto para trabalhar a Matemática e são um modo de motivar os estudantes para a exploração de ideias importantes como sejam a conjetura e a generalização.

Segundo Vale (2012), este trabalho é essencial, pois permite descobrir diferentes modos de ver em sequências e problemas; dá sentido a expressões numéricas, relacionando-as com a representação visual; permite aos alunos muito novos formular conjeturas de modo intuitivo, recorrendo à linguagem verbal, ou mais formal, recorrendo à simbologia Matemática; proporciona oportunidades de argumentar e comunicar matematicamente; permite o desenvolvimento da capacidade de generalização próxima e distante (que iremos distinguir mais a frente), que é fundamental para o PA e do próprio raciocínio matemático; e contribui para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática, por parte dos alunos, porque são desafiantes e apelam fortemente à curiosidade e criatividade, funcionando assim, como um factor de motivação. Para além destas vantagens, Vale e Pimentel (2005) acrescentam que o trabalho com padrões promove o desenvolvimento do raciocínio matemático, torna os alunos bons solucionadores de problemas e melhora a compreensão do sentido do número, da Álgebra e dos conceitos geométricos, bem como o desenvolvimento do conhecimento de novos conceitos.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) afirmam que as regularidades são uma parte fundamental no ensino da Matemática, pois "o reconhecimento de regularidades em Matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular permitem que a aprendizagem da Álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração. Esta capacidade é essencial no desenvolvimento da competência matemática" (p. 111). A generalização de padrões é uma das formas que se utilizam para fazer a transição do pensamento numérico para o algébrico, porque possibilita dar significado à generalização sem ter de recorrer obrigatoriamente a fórmulas e permite chegar à expressões numéricas que os estudantes compreendam e que não sejam uma mera mecanização de utilização de símbolos e letras sem significado.

É, também, reconhecido por vários investigadores que o trabalho com padrões facilita o desenvolvimento de competências matemáticas como a generalização, a resolução de problemas, a comunicação matemática. Alguns autores afirmam que a procura e identificação de padrões enfatizam a exploração, investigação, conjetura e prova, desafiando os alunos a recorrer às suas destrezas de pensamento e ordem e desenvolve a capacidade espacial e da aprendizagem de conceitos geométricos.

Segundo Vale (2012), as regularidades são um meio privilegiado para a resolução de problemas, pois permitem que se resolva problemas através do processo de exploração e investigação e proporciona aos alunos a oportunidade de explorarem, investigarem, colocarem questões, experimentarem, explicarem relações dos vários elementos do padrão, elaborarem, formularem, testarem conjeturas, discutirem, generalizarem e comunicarem as suas ideias. As atividades com regularidades obrigam a que seja necessário procurar todas as possibilidades. Estas atividades desafiam os alunos a recorrer às suas capacidades de pensamento, essenciais num trabalho de natureza exploratório e investigativo que se pretende nas salas de aula. Estes processos são também parte integrante e essencial do PA, que constituem uma componente poderosa em Matemática desde os primeiros anos. Entre as várias estratégias para resolver problemas, destacamos a procura de padrões como uma estratégia poderosa a incentivar e a desenvolver nos alunos. Para Alvarenga e Vale (2007), "os problemas que envolvem a descoberta de padrões contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e para o estabelecimento de conexões entre diferentes temas matemáticos. Em particular, é um modo de envolver os alunos nalgumas das componentes fundamentais do PA, como sejam o particularizar, o conjeturar, o generalizar e, eventualmente, o simbolizar das relações encontradas" (Alvarenga e Vale, 2007, p. 4).

Quando se abordam os padrões, sequências e regularidades, existem 3 fases de investigação: a procura do padrão e a sua identificação; a compreensão e o reconhecimento do padrão, descrevendo-o e analisando os processos matemáticos; e a generalização do padrão, em que o aluno consegue determinar o termo de qualquer ordem.

Cunha (2010), Barbosa, Vale e Palhares (s.d.) apontam algumas estratégias usadas na resolução de tarefas que envolvam sequências crescentes com suporte pictórico, consideradas também, estratégias de generalização, são elas: a contagem, diferença, objecto inteiro e linear. No método de contagem, os alunos procediam à contagem dos elementos apresentados no desenho e se necessitarem de indicar o termo de determinada ordem, contam até o alcançar. No método da diferença, os alunos verificavam quantos elementos aumentavam por cada termo e quando pretendiam calcular os seguintes iam adicionando o mesmo número recursivamente. No método do objeto inteiro, os alunos utilizavam o conceito de múltiplo ou de proporcionalidade directa para calcular o número de elementos de determinado termo, a partir daqueles que já tinham (por exemplo, a sequência de números pares – 2n). Por último, apresenta o método linear, em que é utilizado quando os alunos reconheciam que na generalização do padrão eram necessárias algumas operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) e a ordem pela qual as operações eram realizadas também era importante (por exemplo, na sequência dos números 1, 4, 7, 10, …, a fórmula do termo geral é 3n-2).

Na resolução de problemas e de outras tarefas que envolvem padrões, as dificuldades típicas costumam ser a chegada da expressão algébrica, ou seja, a obtenção do termo geral da sequência, pois por vezes, os alunos estão com o objetivo de encontrar rapidamente este termo geral e não observam algumas propriedades que tem a sequência; outro erro comum é chegar a esse termo geral e estar correto, mas não refletir o porquê de ser esse, ou seja, não olham para a combinação dos seus números.

1.4. Álgebra: algumas definições e sua relação com as regularidades

Se procurarmos num dicionário o significado da palavra Álgebra, aparece-nos como resultado: "disciplina que trata por meio de fórmulas, problemas nos quais as grandezas são representadas por símbolos" (segundo o dicionário de Língua Portuguesa, Porto Editora, 2011, p. 44); "aplicação à lógica e à expressão de toda a espécie de pensamento de simbolismo operatório análogo ao simbolismo algébrico" (do árabe al-jabr, "redução") (p. 76).

Segundo o NCTM (2007), a Álgebra possui a sua origem no estudo de métodos gerais para resolver equações. A Álgebra estuda a relação entre quantidades, incluindo funções e formas de representar relações matemáticas. Para além de trabalhar com quantidades, a Álgebra permite expressar a relação entre essas quantidades, quer sejam conhecidas ou desconhecidas. Segundo Borralho e Barbosa (s.d.), a Álgebra pode ser definida como um sistema matemático usado para generalizar algumas operações matemáticas permitindo que letras ou outros símbolos substituam os números. A Álgebra deve ser vista como "a generalização da aritmética", partindo da procura de padrões numéricos, com o objetivo de encontrar relações. Alvarenga e Vale (2007) afirmam que alguns autores referem que "o trabalho com sequências numéricas permite reconhecer, descrever, prolongar e criar padrões, além de poder ser considerado um importante percursor da Álgebra. Ao pedir aos alunos para observar e caracterizar verbalmente os padrões, podemos estar a ajudar na transição da aritmética para a Álgebra" (Alvarenga e Vale, 2007, p. 6) e identificam a exploração de padrões como um caminho para a Álgebra.

Segundo Branco (2008), o ensino da Álgebra pode ser abordado segundo diferentes caminhos, podendo ser eles a generalização, resolução de problemas, modelação e funções. Focando-nos apenas na primeira abordagem, baseia-se na ideia de que os alunos podem aprender a apreciar o que é invariante no meio da mudança. De acordo com Mason e Sutherland (2002), citados por Branco (2008), expressar generalizações não é uma capacidade que é dominada e depois adquirida definitivamente, mas é antes um processo contínuo e progressivo de grande sofisticação. Nesta abordagem, a principal dificuldade está relacionada com a sua grande carga cognitiva. Os alunos sentem dificuldade em passar da observação de um padrão para a elaboração de uma expressão que represente a generalização observada.

Segundo Alvarenga e Vale (2007), é de realçar que "a relação entre os padrões e a Álgebra atinge, cada vez mais, os diferentes níveis de ensino, deixando para trás a ideia de que a Álgebra apenas deveria ser abordada nos anos mais avançados" (…) defendem que a generalização de padrões é um veículo com potencialidades para fazer a transição do pensamento aritmético para o algébrico, porque permite dar significado à generalização sem ter que recorrer, obrigatoriamente, a variáveis e a fórmulas" (Alvarenga e Vale, 2007, p. 9).

1.5. Algumas dificuldades geralmente sentidas pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem da álgebra

O processo de ensino-aprendizagem da Álgebra é uma realidade complexa. Para que os alunos possam compreender Álgebra é importante que, durante todo o seu percurso escolar, tenham contacto com experiências algébricas informais que envolvam a análise de padrões e relações numéricas. O aluno competente algebricamente percebe a relação existente entre objetos e consegue raciocinar sobre essas relações de uma forma geral e abstrata. Um aluno que não consiga fazer conexões e que não entenda essas relações é forçado a "decorar" regras algébricas sem nunca as conseguir justificar.

Existe algumas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem da Álgebra. Uma delas depara-se com a capacidade de abstração, que nem sempre os alunos evidenciam. São imensos os alunos que sentem dificuldade em passar da fase concreta para a fase da abstração, ou seja, a passagem que os alunos fazem da Aritmética para a Álgebra. Os processos de raciocínio em Álgebra são diferentes dos utilizados em Aritmética, pois apesar de ser preciso o uso de operações para resolver o problema, é fundamental que o aluno o represente através de um sistema simbólico adequado. Por esse motivo, o NCTM aconselha a desenvolver-se um trabalho de pré-Álgebra com os alunos, utilizando diversas experiências articuladas com a Aritmética que, de um modo informal, promovem uma aprendizagem rica e significativa da Álgebra. Antes de se entrar na manipulação formal de entes algébricos é relevante desenvolver experiências algébricas informais, isto é, o desenvolvimento do pensamento pré-algébrico. Acrescenta que esta noção está relacionada com determinadas relações numéricas, com a forma como são explicitadas em linguagem corrente e representadas através de diferentes formas, incluindo o uso de símbolos.

Para Branco (2008), outras dificuldades para além das mencionadas quando se inicia o estudo da Álgebra passam por dar sentido a uma expressão algébrica; ver a letra como representação de um número ou de um conjunto de números; atribuir significados concretos às letras que existem numa expressão; pensar numa variável como significado de um número qualquer e passar informação da linguagem natural para a linguagem algébrica, para além da não compreensão do sentido de incógnita.

Para Cunha (2010), há estudos que referem que encontrar termos numa sequência torna-se progressivamente mais difícil, à medida que se encontram mais distantes dos termos que lhes são apresentados; a dificuldade em explicar um padrão é maior do que continuá-lo; e a explicação das regras detetadas nas sequências é muito mais fácil oralmente do que por escrito, o que revela que o grau de abstração do aluno parece ser um elemento determinante da dificuldade conceptual e do interesse pelos padrões. Muitos estudantes parecem ter grande dificuldade em trabalhar com letras em vez de números. A passagem dos números para um maior grau de abstracção parece ser um dos grandes desafios a nível da educação matemática: a partir dos números dar sentido às letras.

Segundo Branco (2008), "o início da aprendizagem da Álgebra exige algum grau de abstracção e alguma capacidade de reformular o significado e o jogo de símbolos usados na Aritmética. Nem sempre estas condições se verificam e para os alunos a aprendizagem desta é, muitas vezes, desprovida de significado" (Branco, 2008, p. 28). Para esta autora, o professor deve conhecer e compreender a origem das dificuldades sentidas com maior frequência pelos alunos, propondo tarefas que contribuam para os ajudar a colmatá-las. O que alguns autores propõem, segundo Ponte (2005), é levar os alunos a pensar algebricamente, percebendo regularidades e explicitar essas regularidades através de expressões matemáticas.

1.6. As regularidades e o pensamento algébrico

"A generalização está no coração do pensamento algébrico" (Schliemann, Carraher, & Brizuela).

Segundo Santos e Oliveira (2008), "o reconhecimento de sequências e de regularidades desempenha um papel importante no ensino da Matemática, sendo considerado por alguns autores como a base do pensamento algébrico. A sua exploração ajuda a desenvolver nos alunos capacidades relacionadas com o pensamento algébrico, favorecendo o estabelecimento de relações e apelando à generalização" (Santos e Oliveira, 2008, p. 1). Diversos estudos têm mostrado que ao longo dos primeiros anos de escolaridade, é possível desenvolver, de um modo intuitivo e informal, muitas das ideias que se encontram na base da Álgebra e que são fundamentais para o estudo posterior deste tema.

Trabalhar a Álgebra através da resolução de problemas envolvendo sequências é uma possível abordagem ao desenvolvimento do PA no ensino básico. Quando um aluno relaciona quantidades com sequências está a adquirir conceitos matemáticos muito importantes, como o conceito de função. Segundo Almeida (2010), a resolução de tarefas de investigação e exploração que envolvam sequências por um lado focam a exploração, investigação, conjetura e prova, mas também são desafiadoras para os alunos e promovem a comunicação de ideias matemáticas. Poder-se-á afirmar que a integração de tarefas de investigação com sequências assume um papel de destaque na abordagem à Álgebra e nos primeiros anos de escolaridade como base ao pensamento pré-algébrico.

Mas o que é isto de pensamento algébrico (PA)? Vários autores apresentam várias definições. Segundo Blanton & Kaput (2005), que foram citados por Canavarro, (2007), consideram o PA como: "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade" (Canavarro, 2007, p. 87); para Kieran (2007), citado por Canavarro, (2009), "Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (e.g. Mason, 2005). Assim, a Álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas" (Canavarro, 2007, p. 87). Por isso, o foco do PA está na atividade de generalizar. Para Kaput (1999), citado por Canavarro (2007), "A generalização envolve a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas e as relações através de e entre eles" (Canavarro, 2007, p. 87). Segundo este último autor, o PA é algo que se manifesta quando se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais objetivas.

"O pensamento algébrico diz respeito à simbolização (representar e analisar situações matemáticas, usando símbolos algébricos - simbolização), ao estudo das estruturas (compreender padrões, relações e funções) e à modelação (usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas), bem como à variação (analisar mudança em diversas situações). Implica conhecer, compreender e usar os instrumentos simbólicos para representar o problema matematicamente, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar e avaliar esse resultado" (Vale e Pimentel, 2009, p. 11; Borralho e Barbosa, 2011, p. 3; NCTM, 2007, p. 39). O desenvolvimento do PA nos primeiros anos requer o estímulo de modos de pensamento que resultam de analisar relações entre quantidades, reparar na estrutura, estudar a mudança e generalizar. Segundo Borralho e Barbosa (2009 e 2011), o PA inclui a conceptualização e aplicação da generalidade, envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas. É algo muito mais amplo do que a manipulação simbólica. O PA consiste em usar os instrumentos simbólicos para representar o problema de forma geral, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretá-lo. O principal instrumento da Álgebra é o símbolo. Podemos afirmar que a capacidade de manipular símbolos faz parte do PA. Assim, torna-se essencial procurar uma forma de fazer com que os alunos entendam os símbolos. Os padrões ajudam os alunos a perceber a noção de variável, que para a maioria, é apenas vista como um número desconhecido.

Por isso, é necessário que o objeto de estudo fundamental da Álgebra não se reduza à resolução de equações tal como tem sido considerado até agora. A Álgebra aparecia descontextualizada, apenas como um conjunto de símbolos desligados uns dos outros, onde os alunos não entendem a necessidade da sua utilização. Mas apesar de para muitos alunos ainda ser esta a noção que domina, no centro da Álgebra de hoje estão relações matemáticas abstratas. Antes de se avançar para a aplicação automática de regras torna-se fundamental, nomeadamente, desenvolver o sentido do símbolo. Todos os alunos podem aprender Álgebra. Contudo, é necessário que entendam os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como os símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas e perceberem o seu significado. O PA recorre ao uso de símbolos para extrair informação de uma situação concreta; representar essa informação matematicamente em palavras, diagramas, tabelas, gráficos e equações e interpretar e aplicar conhecimentos matemáticos, tais como a determinação de incógnitas, o teste de conjeturas e a identificação de relações para várias situações.

Uma ideia que sobressai do PA é a de generalização, o que faz com que pensemos nela como um dos elementos integrantes do pensamento matemático. "A generalização é um objetivo fundamental no ensino e na aprendizagem da Matemática. (…) No entanto, constitui ainda um veículo para a construção de novo conhecimento, agindo como um catalisador para potenciar a aprendizagem, principalmente, no campo da Álgebra" (Barbosa, 2009, p. 59).

A generalização surge com o reconhecimento de padrões e relações e da análise dessas relações. Segundo Stacey (1989), citado por Vale e Pimentel (2009), Vale (2009), Barbosa (2009) e Almeida (2010) existem dois tipos de generalização: generalização próxima, que se refere a descobrir termos próximos do que se apresenta, ou seja, a descoberta do termo seguinte e que pode ser obtido por contagem, desenho ou por recurso a uma tabela e que normalmente envolve relações recursivas, pois utiliza o raciocínio recursivo; e a generalização distante, que diz respeito aos termos que estão numa posição que dificilmente se poderão descobrir por exaustão, que envolve a descoberta do padrão e que requer uma compreensão da lei de formação, ou seja, uma regra geral através de uma expressão matemática e requer a procura de relações funcionais. Este tipo de generalização faz uso do reconhecimento global da estrutura do padrão. Estes processos de generalização também são conhecidos por generalização local e global, respetivamente e promovem desenvolvimento do pensamento algébrico. A generalização próxima é mais habitual, mesmo entre os professores, mas é mais pobre por não permitir descrever o que se passa com um termo de qualquer ordem. Assim, deve ser feita esta aprendizagem que permite relacionar qualquer termo com a respetiva ordem e que fornece de imediato uma descrição sobre o modo de conhecer qualquer termo da sequência. Nesta generalização distante, há um raciocínio indutivo baseado num pensamento visual, fortemente ligado ao modo como os alunos conseguem ver a lei de formação do padrão. Porém, segundo Vale (2009), uma vez que a generalização envolve raciocínio, abstração, visualização e flexibilidade, a capacidade de generalizar vai permitir caracterizar e diferenciar os estudantes uns dos outros, isto é, os alunos mais competentes procuram relações funcionais em detrimento das recursivas que são utilizadas pelos alunos menos dotados.

Polya (1965), citado por Barbosa (2009), considera que, normalmente, a generalização não é um processo imediato mas sim gradual, dado que começa com tentativas, um esforço para tentar entender os factos observados para fazer analogias e testar casos especiais. Estas tentativas poderão levar a uma generalização melhorada, podendo nenhuma ser considerada definitiva sem uma demonstração matemática sólida.

Como já vimos, a generalização é um objeto fundamental da Matemática e por isso, segundo Devlin (2002), a Matemática não é apenas manipulação simbólica segundo determinadas regras arcaicas, mas sim a compreensão de padrões. A passagem da aritmética para a Álgebra é uma das grandes dificuldades dos alunos e os professores devem diversificar estratégias permitindo, aos seus alunos, desenvolver o PA. Este tornou-se uma orientação transversal do currículo.

Gordillo (2011) na sua tese de doutoramento cita dois autores que têm algumas opiniões sobre a generalização, nomeadamente Radford (2006), "*el punto crucial en una generalización es justificar la extensión del aspecto común a todos los elementos de la secuencia"* e para Mason (1999) "*la generalización tiene que ver con notar patrones y propiedades comunes a varias situaciones*" (Gordillo, 2011, p. 16).

Segundo Mason (1996), citado por Almeida (2010), o PA emerge nos alunos quando estes detetam, estabelecem uniformidades e diferenças, fazem distinções, classificam, procurando algoritmos. Kaput (1999), citado mais uma vez por Almeida (2010) "debruçou-se sobre o conceito de pensamento algébrico e no seu entender, este pensamento tem lugar quando, através de processos de conjetura e argumentação, são estabelecidas generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer aspeto matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade" (Almeida, 2010, p. 43). Deste modo, identifica cinco formas de PA, intrinsecamente relacionadas entre si, sendo elas: a generalização e formalização de padrões e restrições; a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; o estudo de estruturas abstratas; o estudo de funções, relações e de variação conjunta; e a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos.

Na exploração matemática das tarefas realizadas pelos alunos é importante que o professor lhes dê a conhecer instrumentos como tabelas diversas, retas numéricas, diagramas, gráficos de vários tipos, materiais concretos, pois tornam-se referências em torno das quais os alunos pensam algebricamente. Além destes instrumentos, os alunos devem ser ensinados a lidar com processos matemáticos como registar, recolher, representar, organizar dados, que não sendo exclusivos do PA, lhe prestam grande utilidade, ou seja, o professor deve ajudar os alunos a dar visibilidade às estruturas matemáticas subjacentes à situação em estudo, promovendo o uso consciente de modos de representação favoráveis à generalização.

Podemos então dizer que o grande objetivo do estudo da Álgebra nos ensinos básico e secundário é desenvolver o PA dos alunos. Ao nível do 1.º e 2.º ciclo do EB não se pretende ensinar os alunos a resolver equações, mas a contactar com diversas experiências de aprendizagens que valorizem a descoberta, continuação e construção de padrões e o caminho em direção à descoberta e explicação da lei de formação e generalização. A generalização é uma componente essencial do PA e do próprio raciocínio matemático.

A literatura descreve vários estudos que nos permitem concluir que as tarefas de padrões tem-se revelado potenciadoras no desenvolvimento de capacidades de generalizar e em promover o PA e são essenciais na abordagem da Álgebra. Importa saber até que ponto os alunos são capazes de compreender e generalizar a diversidade de padrões numéricos que lhes são propostos e qual o desempenho que apresentam neste tipo de tarefas, dado que encontrar termos numa sequência é normalmente o primeiro passo para chegar à Álgebra. A questão é saber se os alunos conseguem encontrar a regra que conduz ao termo geral e como o fazem.

1.7. O ensino e a aprendizagem das regularidades

As formas de trabalhar as regularidades

Segundo Branco (2008), numa fase inicial, o uso de sequências repetitivas constitui um veículo para o trabalho com símbolos, um caminho conceptual para a Álgebra e um contexto para a generalização. Contudo, os alunos mais novos podem gerar padrões repetitivos usando métodos rítmicos, mas que possivelmente, não compreendem. Estes alunos nem sempre têm desenvolvidas as capacidades que lhes permitem explorar o conceito de unidade que se repete. Por isso, sugere-se que o trabalho com padrões repetitivos seja continuado para além dos primeiros anos com o intuito de aprofundar a exploração do padrão com base na compreensão dessa unidade.

Segundo Vale e Pimentel (2009), em relação a estes padrões (sequências) se tivermos um padrão de repetição como este: triângulo – quadrado – triângulo – círculo – círculo -

triângulo – quadrado – triângulo – círculo – círculo - triângulo – quadrado – triângulo – círculo – círculo, o motivo de repetição é triângulo – quadrado – triângulo – círculo – círculo. Inicialmente, pode-se construir uma tabela para verificar o que se repete, e quantas vezes, por exemplo, neste padrão temos 3 grupos, que são as 3 vezes que o motivo se repete. Em cada grupo (motivo de repetição) existe dois triângulos, um quadrado e dois círculos. Podemos concluir que o número de grupos é igual ao número de quadrados e que o número de círculos e triângulos é o dobro do número de grupos e círculos. Podem ser lançadas algumas questões como por exemplo: qual é o motivo de repetição presente? Qual o termo seguinte? Numa sequência de 25 figuras, qual será a 25.ª figura? Qual será a 31.ª? Numa sequência com 10 triângulos, quantas figuras haveria ao todo? Escreve as conclusões a que chegaste (já foram referidas anteriormente). Esta última questão é bastante relevante, pois é importante que os alunos verbalizem as suas descobertas e que as comuniquem, sendo esta capacidade de comunicação deveras relevante, pois a comunicação matemática também faz parte do PMEB (2007) no tópico das Capacidades transversais. Esta última questão já envolve o processo de generalização, por se tratar de termos distantes, para os quais é difícil continuar a sequência.

Para as mesmas autoras, se formos para os padrões de crescimento, este trabalho deve incluir questões como por exemplo: descreve o termos seguinte, qual será o 3.º termo? E o 7.º ? Porém, a mesma sequência inicial pode continuar de vários modos, por exemplo, uma sequência começada por 1, 3, 9, se escrevêssemos os três termos seguintes, as várias respostas poderiam ser: 1, 3, 9, 27, 81, 243; ou 1, 3, 9, 19, 33, 51; ou 1, 3, 9, 1, 3, 9; ou 1, 3, 9, 9, 3, 1, entre outros, o que mostra que existem diferentes formas de observar as regularidades e de continuar um padrão, pois o que é relevante é a explicação de como pensaram. Muitas vezes, os próprios alunos descobrem regularidades que os professores não tinham ainda visto, o que faz com que a aula se torne ainda mais rica e interessante para todos. Segundo Ponte (2009), outro possível problema com padrões (para além de ver só uma forma de os continuar), passa por elaborar questões repetitivas, o que faz com que em vez de ser uma atividade de carácter exploratório e investigativo, passe a ser um exercício “mecanizado”, em que o objetivo é determinar o termo seguinte, ou o termo geral e mecanizam estratégias para responderem sem ter muito que pensar. Questões como qual será o 20.º termo, explica como pensaste, são questões que requerem outra estratégia, pois tornava-se dispendiosa e demorada se recorrêssemos à descoberta de cada um dos termos até ao pretendido. Portanto, se os alunos já tiverem alguma familiaridade com estratégias de resolução de problemas e de organização de informação (tratamento de dados), constroem tabelas, de forma a procurar um modo para fazerem a generalização distante, em que inicialmente se recorre a palavras e depois às expressões algébricas. Por isso é importante registar nas tabelas, dado que também é importante registar a expressão numérica que resulta do modo como a regularidade foi vista. Este procedimento facilitará o processo de generalização distante para outros termos da sequência, para a qual não seja possível fazer a construção. Este trabalho também deve incidir na descoberta do elemento que falta, pois é uma tarefa mais complexa do que continuar o padrão para frente. Continuar a sequência para trás também é essencial, pois é uma tarefa também mais complexa e é importante que o professor coloque estes vários tipos de tarefas, assim como a criação de padrões que também é fundamental. Estes padrões podem ser considerados como sequências numéricas. Mas, antes, deve ser dada uma atenção especial ao trabalho com sequências figurativas, dado que estas também levam à generalização próxima ou local, e por isso, vai permitir o desenvolvimento do raciocínio recursivo e distante.

Segundo Vale (2012), os alunos geralmente possuem um forte conhecimento visual de ideias e conceitos matemáticos. Muito antes do uso do simbolismo algébrico devemos olhar para os aspetos prévios da generalização. "Ver" um padrão é necessariamente o primeiro passo na exploração do padrão. Assim, na resolução de determinada tarefa devemos prestar atenção às características figurativas que podem estar relacionadas com a generalização, isto é, em que o "ver" é uma componente importante da generalização. Assim, o ensino precisa propor tarefas que permitam fazer generalizações, através dos seus aspetos numéricos e figurativos, acumulando esta capacidade inata dos alunos em pensar visualmente. Estes só podem desenvolvê-la através de experiências em situações que suscitem este pensamento. Por isso, a visualização é uma componente essencial para a compreensão de propriedades e relações geométricas e numéricas. Para Vale, Pimentel, Alvarenga e Fão (2011) ver pode basear-se na sequência de figuras ou na correspondente sequência numérica ou em ambas. A investigação tem mostrado que os contextos figurativos são mais intuitivos para a maior parte dos alunos, principalmente, para os dos níveis mais elementares. Como tal, o professor deve começar por desenvolver nos alunos as suas capacidades visuais, propondo tarefas de padrões em contextos figurativos, de modo a evidenciar as propriedades das figuras e das suas relações geométricas e numéricas.

Por fim, os problemas com padrões são essenciais. Por norma, costumam ser abordados nas etapas finais, pois a sua complexidade é maior. Consiste na descoberta do padrão e consequente generalização para estabelecer relações e propriedades que permitam chegar à solução. Passaremos a abordá-los a seguir.

Estas atividades estão incluídas nas várias fases de ensino-aprendizagem com sequências e regularidades e são elas as contagens visuais, as sequências quer de repetição, quer de crescimento e os problemas com padrões. Segundo Vale (s.d., 2009 e 2012) e Vale, Pimentel, Alvarenga e Fão (2011), estas fases podem resumir-se em três, nomeadamente:

- ✓ Contagens, em que se deve começar pelo reconhecimento de padrões para desenvolver a capacidade de ver instantaneamente. O desenvolvimento desta capacidade irá permitir que os alunos avancem para tarefas de contagem em contextos figurativos diversificados, permitindo uma flexibilidade de pensamento ao nível de estratégias de contagem que conduza a expressões numéricas diversificadas mas equivalentes. Os alunos devem aprender a reconhecer um conjunto de objetos numa determinada disposição e dizer quantos há, sem os contar. Esta capacidade de "ver instantaneamente" quantos objetos estão presentes é conhecida por *subitizing.* A contagem um a um irá sendo posta de lado à medida que os alunos vão construindo estas novas relações e utilizando ideias mais poderosas sobre o que vêem;
- ✓ Sequências, que envolvem quer padrões de repetição quer de crescimento e têm o objetivo de reconhecer, descobrir, continuar, completar e generalizar padrões;
- ✓ Problemas, onde não está presente nenhuma sequência explícita, mas que terá de ser construída pelos alunos como meio de chegar à generalização, e por sua vez, à solução do problema. Estes contextos são um suporte a que os alunos podem recorrer e que lhes permite "ver" e entender a relação que existe entre a ordem das figuras e o número que lhe corresponde. Todas estas fases levam à generalização através de regras que os próprios alunos formulam, permitem que a aprendizagem da Álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração.

Ou seja, segundo Vale e Pimentel (2009) e Vale (2005) se resumirmos esta parte sobre as abordagens sobre como trabalhar este tema, podemos concluir que os alunos deviam ter oportunidade de transferir padrões de uma representação para a outra; averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade; descobrir o padrão de uma sequência; descrever o padrão oralmente e por escrito; continuar uma sequência e/ou completá-la; prever termos numa sequência; descobrir a lei de formação numa sequência; generalizar e construir uma sequência, para além das três fases referidas anteriormente.

As diferentes estratégias dos alunos na exploração de sequências

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), existem algumas estratégias que surgem com maior frequência quando se exploram sequências, nomeadamente:

1. *Estratégia de representação e contagem*. O aluno representa todos os termos da sequência até ao termo solicitado e conta os elementos que o constituem para determinar o termo da sucessão numérica correspondente. Esta estratégia não permite realizar uma generalização distante. Contudo, permite saber o processo que o aluno usou para representar os termos da sequência e como a analisa. É o exemplo dos números figurados, em que para cada figura, o aluno tem de contar o número de pontos que cada figura tem, para registar o valor.

2. *Estratégia aditiva*. Esta estratégia tem por base uma abordagem recursiva, na medida em que o aluno compara termos consecutivos e identifica a alteração que ocorre de um termo para o seguinte, ou seja, a diferença entre os termos dessa sequência;

3. *Estratégia do objeto inteiro*. O aluno pode considerar um termo de uma dada ordem e com base nesse determinar o termo de uma ordem que é múltipla desta. Seguem-se como exemplos em que o aluno determina o termo de ordem 10 com base no termo de ordem 5 ou determina o termo de ordem 36 com base nos termos de ordem 4 e 9, multiplicando-os. Esta estratégia é aplicável quando há proporcionalidade direta;

4. *Estratégia da decomposição dos termos*. A decomposição de um termo de uma sequência pictórica permite, muitas vezes, identificar o seu processo de construção, possibilitando a determinação de termos de ordem distante. Nesta estratégia, o aluno estabelece uma relação entre um termo e a sua ordem. Esta estratégia origina diferentes

expressões algébricas para generalizar a sequência numérica associada à sequência pictórica em análise.

1.8. Os números figurados

Os números figurados foram analisados pela primeira vez, pela escola pitagórica, cujo fundador foi o célebre Pitágoras. Estes números são uma boa ilustração da ligação entre os números e as formas.

Pitágoras – Breve biografia

Segundo Reimer e Reimer (1990), Pitágoras de Samos foi um filósofo e matemático grego que nasceu no século VI a.C. (580 - 497 a.C., aproximadamente), na ilha de Samos, próximo de Tales, onde nasceu outro matemático grego célebre, Tales, ambos na Grécia. Recebeu uma ótima educação, pois teve aulas de poesia e música, e mais tarde, de filosofia. Teve dois irmãos e durante a sua juventude, a sua família visitou Itália. Em 535 a.C., viajou até ao Egipto para desenvolver os seus estudos e começou a seguir algumas crenças e alguns rituais (daí ele ter fundado mais tarde a escola pitagórica, em que podia ser caracterizada como misteriosa e com alguns enigmas). Segundo alguns autores, este também esteve em algumas regiões do mediterrâneo.

Depois destas viagens, ele tencionava fundar a escola pitagórica na sua terra natal. Contudo, devido à oposição de Polícrates (o governador da ilha de Samos) e ao desinteresse dessa população pelo saber, dado que só conseguiu um aluno e teve que lhe pagar para assistir às suas aulas, foi impossível, o que faz com que a funde no ano 530, em Crotona (sul de Itália). Ensinava Ética, Filosofia e Matemática. A ciência pitagórica era constituída principalmente por quatro disciplinas: Aritmética, Geometria, Astronomia e Música. Contudo, como eles defendiam que o número era a chave para a compreensão do mundo, eles davam primazia à Aritmética, considerando as outras três áreas como ciências redutíveis à Aritmética e dedicava-se, essencialmente, ao estudo das propriedades dos números. Ele morou numa cave, fora da cidade, onde pesquisou os usos da Matemática. É nesta cidade que se torna o centro de uma vasta organização que era uma confraria religiosa, ou uma associação para a reforma moral da sociedade. A corrente científica aparece mais tarde. Esta escola funcionava como uma seita, usavam como talismã um pentágono estrelado (pentagrama) e, dado que os conhecimentos que descobriam eram transmitidos oralmente aos outros membros e sob juramento, não podiam transmitir esses conhecimentos para o exterior, por essa razão, é impossível distinguir a autoria individual das suas descobertas e atribui-se todo o mérito à escola pitagórica. Segundo a lenda, na altura, Pitágoras sentenciou a morte por afogamento a um dos seus discípulos (Hípaso), por ter revelado um dos conhecimentos, visto que, para proteger a sua filosofia numérica, a seita seria capaz de matar. Este tal "segredo", pensa-se que poderá ter sido a descoberta dos números irracionais.

Aprendeu também Mistérios religiosos, Música, Ciência (principalmente astronomia) e Matemática babilónica, tornando-se assim, perito em Aritmética e Teoria Matemática da Música. Após estas aprendizagens, regressou à Samos, em 520. Pode-se afirmar que é um herói de aventuras.

Esta escola teve como duração dois séculos, nomeadamente desde o século VI até ao IV a.C. Nesta instituição, existia dois aspetos, que levou pelos fins do século V a.C., à sua divisão em dois grupos: os matemáticos, de origem científica e os acusmáticos, inclinados para a devoção, mitos e tradições. Os acusmáticos seguiam com fervor os mitos e aspetos religiosos, enquanto que os matemáticos seguiam também algumas devoções, mas nunca abandonaram a ciência. Nesta seita, acreditavam na metempsicose (a transmigração da alma de um corpo para o outro após a morte), ou seja, na reencarnação e na imortalidade da alma. Os principais nomes que fizeram parte da Escola Pitagórica foram: Filolaus de Tarento, Arquitas de Tarento e Hipasus de Metaponte. O pitagorismo influenciou também as obras de Platão e Euclides.

Apesar da aversão de Pitágoras a política, a "seita" foi envolvida no ataque a Crotona, no ano 510. Em 508, os pitagóricos foram atacados, tendo como consequência, a fuga de Pitágoras da cidade e alguns dizem que morreu no exílio, em Metaponte. Outros afirmam que ele regressou a Crotona, onde morreu mais tarde. Após a morte dele, os seus membros foram perseguidos e acabaram por se fixarem em Metaponte.

Pitágoras ficou conhecido na antiga Grécia, principalmente, pelo famoso Teorema de Pitágoras (o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos). No entanto, este teorema já era conhecido há mais de 1000 anos pelos babilónios, contudo, este é associado ao nosso matemático porque talvez tenha sido ele ou um dos seus discípulos os primeiros a apresentarem uma demonstração para o mesmo; pelos ternos pitagóricos (números naturais que obedeçam a esta regra: $x^2 + y^2 = z^2$, em que estes números constituem as medidas dos lados de um triângulo retângulo); a descoberta do número de ouro (também conhecido por proporção de ouro, entre outros) ((1 + raiz quadrada de 5) a dividir por 2)), sendo este também, um número irracional e consequente descoberta de outros números irracionais, originando assim, a teoria dos números; a soma dos ângulos de um triângulo ser de 180º e é igual a dois ângulos retos; dos 5 sólidos regulares, 3 foram estudados por Pitágoras ou pelos pitagóricos (o tetraedro, o cubo e o dodecaedro), sendo os outros dois (octaedro e o icosaedro) atribuídos à Teeteto. Na Música também deu alguns contributos, tais como a invenção da escala musical; a descoberta do poder do som no corpo humano (efeito medicinal) e que as notas musicais que soam bem juntas estão relacionadas matematicamente, devido ao estabelecimento de relações aritméticas entre os comprimentos das cordas sonoras à mesma tensão. Em Astronomia, Pitágoras foi dos primeiros a afirmar que a Terra e o Universo tinham uma forma esférica. As ideais dos pitagóricos serviram de base a Copérnico. Estes acreditavam que os corpos celestes emitiam sons que dependiam do seu tamanho, distância, densidade e movimento e que todo o universo se uniria numa harmonia musical. Até o próprio símbolo deles (o pentagrama) foi uma descoberta, pois se se considerar um pentágono regular e se traçar as suas diagonais, estas cortam-se em pontos, que definem um novo pentágono regular. Continuando este processo, o pentágono e a estrela pentagonal aparecem sempre e não acaba, pois a sua formação é infinita! A este pentagrama, também é associada a proporção áurea (ou número de ouro), em que o novo pentagrama é proporcional ao original devido à esta proporção; e a palavra Matemática (Mathematike, em grego) surgiu com Pitágoras, que foi o primeiro a considerá-la como um sistema de pensamento baseado em provas dedutivas.

Pitágoras foi casado com a física e matemática grega Theano (uma das suas alunas). Esta e as duas filhas assumiram a escola pitagórica após a morte deste matemático.

O facto de Pitágoras ter chegado até nós como um matemático misterioso e obscuro deve-se à perda de documentos dessa época. Aristóteles escreveu algumas biografias sobre ele, mas não chegaram até aos nossos dias. A dificuldade que existe em identificar a figura de Pitágoras deriva do facto da sociedade secreta que fundou. O conhecimento e a propriedade eram comuns, e por isso, como já foi referido mais atrás, as descobertas não eram atribuídas a um membro em particular, mas ao grupo em si e por essa razão é preferível não dizer trabalho de Pitágoras mas sim, contribuições dos pitagóricos.

Números figurados – origens e propriedades

Pitágoras afirmava "o número é a causa e o princípio de tudo". A frase "tudo é um número" revela o modo como os pitagóricos encaravam o universo. O pensamento pitagórico envolvia rigor e exatidão, mas também algum misticismo, magia e mistério.

A origem da mística dos números prende-se com o facto de que, ao contrário do que acontecia com as calculadoras profissionais, que lidavam com números racionais e aproximações, com vista à resolução de problemas práticos, nunca se preocupavam com as propriedades específicas dos números utilizados (pois eram considerados como meras ferramentas). Pitágoras e os seus discípulos ocupavam-se em descobrir as propriedades dos números, tal como faz hoje um investigador em Teoria de Números.

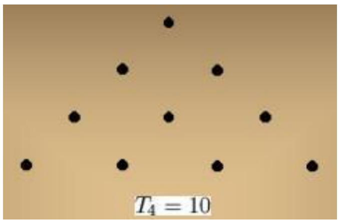
A sua escola descobriu algumas classes de números: números pares, números ímpares, números amigos (ou amicais - quando a soma dos divisores próprios de um número é igual à um outro número e por sua vez, a soma dos divisores próprios desse número é igual ao número inicial, por exemplo 220 e 284); números perfeitos (iguais a soma dos seus divisores, à excepção do mesmo, por exemplo, 6 = 1+2+3); números primos (números que só possuem dois divisores: a unidade e ele próprio, por exemplo 3 e o 5); números compostos (os que contém mais de dois divisores) e os números figurados ou números figura, que são o nosso tema principal, também conhecidos por números poligonais.

Estes números servem como motivação ao estudo do tema Sucessões, nomeadamente, progressões aritméticas. São interessantes devido às suas propriedades, às regularidades que possuem e devido à sua carga histórica, pois os pitagóricos associaram formas geométricas a números e consideravam-nos como uma espécie de átomos.

Segundo Neves (2007), números figurados são números representados como um conjunto de pontos que formam determinadas figuras geométricas. Por outras palavras, a quantidade de pontos representa um número e estão agrupados segundo várias formas geométricas. Atalaia (2009) afirma que estes números são uma sequência de pontos sobre os lados de um polígono regular, de vários modos (que passaremos a enunciar). Os números figurados estão dispostos segundo padrões geométricos. Estes números são exemplos de padrões mistos (numéricos e geométricos), já que podem ser considerados e explorados segundo as duas interpretações. Estes números são os triangulares (pontos dispostos em triângulos equiláteros), os quadrados ou quadrangulares (dispostos em quadrados), os pentagonais (em pentágonos), os hexagonais (em hexágonos), entre outros.

Vários teoremas podem ser enunciados de forma geométrica e de acordo com as propriedades destes números. Podem obter-se diferentes tipos de números poligonais, adicionando os primeiros n termos de uma progressão aritmética e sempre começada pelo número 1, ou seja, o primeiro termo de cada sequência é sempre igual a um ponto. Outros teoremas que podem ser enunciados, segundo Conway (1999):

a) O número triangular de ordem n, Tn é igual à soma dos n primeiros inteiros positivos. São eles o 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, …Para obtermos o termos seguinte, basta adicionar o número natural seguinte, ao termo anterior.



(T4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10), ou T3 + 4 = 10.

O termo geral dos números triangulares é:

$Tn = (n^2 + n) / 2$

Figura 1 – Os números triangulares.

Por exemplo, o segundo termo obtém-se através da soma dos dois primeiros números naturais, e assim sucessivamente, como podemos observar na figura.

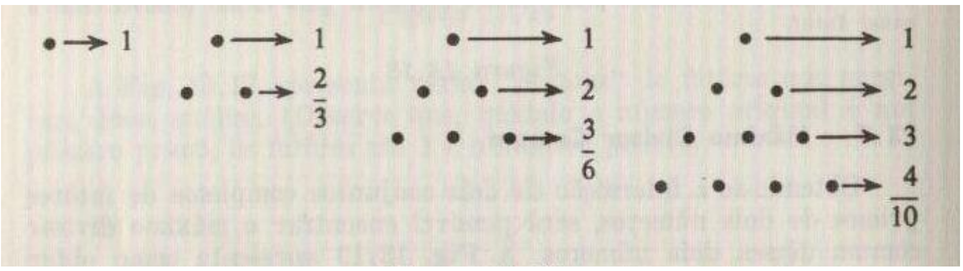
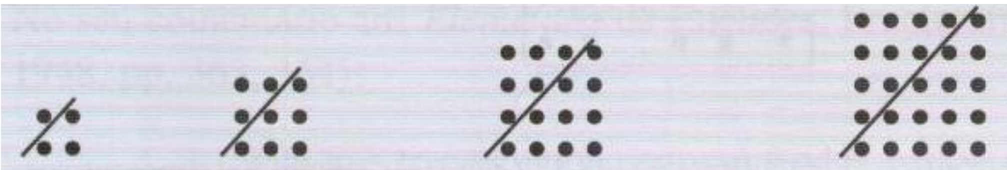


Figura 2 – Os números triangulares.

Outra propriedade sobre estes números é que qualquer número que considerarmos, pode ser decomposto no máximo por três números triangulares. Por exemplo: 51 = 15 + 36; 12 = 1 + 1 + 10; 9 = 3 + 6; 24 = 15 + 3 + 6; etc.

Para além deste facto, podemos observar que um número triangular é composto pela soma de um número quadrado com um número retangular. Por exemplo: 6 = 4 + 2; 10 = 4 + 6; 15 = 9 + 6; 21 = 9 + 12; 28 = 16 + 12, etc.

b) Todo o número quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos, como se pode observar na fig. 3:



1+3 3+6 6+10 10+15

Figura 3 – Os números quadrados.

(Q4 = T3 + T4 = 16 = 6 + 10), isto é: o número quadrado 16 é igual a soma de dois números triangulares sucessivos, tais como 6 e 10. O termo geral dos números quadrados é: n^2.

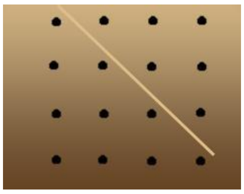


Figura 4 – O número quadrado 16 como junção de dois triangulares.

Também podem ser considerados como a soma dos n números ímpares consecutivos, como por exemplo; 4 = 1 + 3; 9 = 1 + 3 + 5; 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9, etc. São eles o 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, …São considerados também como qualquer número elevado ao quadrado.

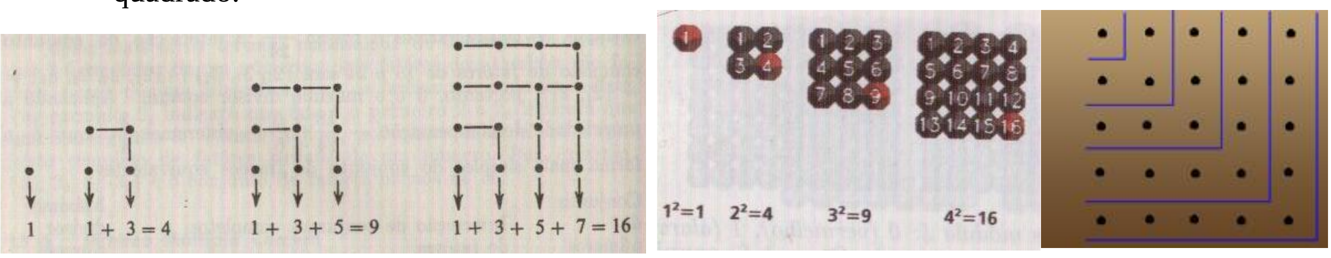
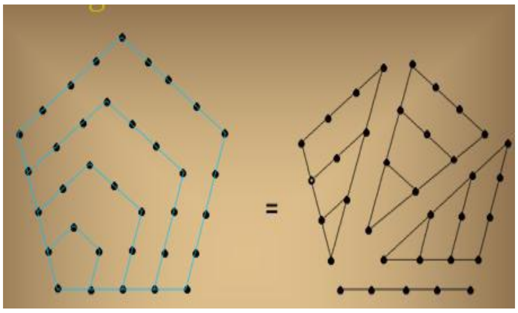


Figura 5 – Os números quadrados como junção de números ímpares consecutivos.

Se analisar melhor estes números, pode-se constatar que a diferença entre números quadrados consecutivos é ímpar e que essa diferença é igual à soma dos números iniciais. Por exemplo: $10^2 - 9^2 = 100 – 81 = 19 = 10 + 9$. Outro caso: $6^2 - 5^2 = 36 – 25 = 11 = 6 + 5$.

c) O n-ésimo número pentagonal é igual à soma de n com o triplo do (n-1) - ésimo número triangular. São eles o 1, 5, 12, 22, 35, …



(P5 = 5 + 3 x T4), ou seja, o T4 = 10, então 10 x 3 = 30. Como queremos saber o 5.º termo, então n = 5, logo, 30 + 5 = 35.

O termo geral dos números pentagonais é:

$$P_n = (3n^2 – n) / 2$$

Figura 6 – Os números pentagonais e uma das maneiras de os formar.

Outra forma de ver estes números passa pela adição dos números de 3 em 3, a começar pelo número 1, ou seja, 1 + 4 + 7 + 10 + 13, …, pois 5 = 1 + 4; 12 = 1 + 4 + 7; 22 = 1 + 4 + 7 + 10; etc.

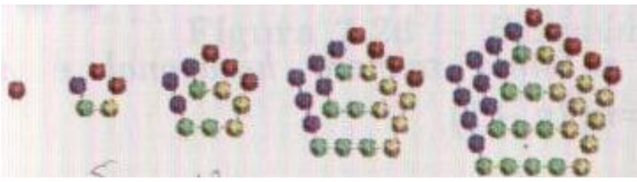


Figura 7 – Os números pentagonais.

Uma propriedade relativa aos números pentagonais deve-se a que cada um é igual a um terço de um número triangular. Por exemplo: o 12, é um terço de 36 e este é um número triangular (termo de ordem 8); o 5 é um terço de 15 (termo de ordem 5); etc.

Outra propriedade interessante é que podemos observar estes números como a soma de um número triangular e um quadrado da ordem seguinte, por exemplo: 5 = 1 + 4 = (2.º número pentagonal = 1.º número triangular + 2.º número quadrado); 12 = 3 + 9 = (3.º número pentagonal = 2.º número triangular + 3.º número quadrado), …

d) Os hexagonais, que são eles o 1, 6, 15, 28, 45,... Para isso, adicionam-se os números de 4 em 4, começando no número 1. Isto é: 1 + 5 + 9 + 13 + 17, …, visto que 6 = 1 + 5; 15 = 1 + 5 + 9, etc. A sua fórmula é: n (2n-1).

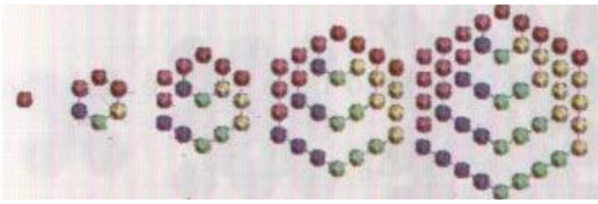


Figura 8 – Os números hexagonais.

Uma propriedade interessante destes números é que cada número hexagonal é um número triangular!

e) Os heptagonais, que são eles o 1, 7, 18, 34, 55, … Para obtermos estes números, adicionamos de 5 em 5, a começar pelo um. Isto é: 1 + 6 + 11 + 16 + 21, …, visto que 7 = 1 + 6; 18 = 1 + 6 + 11, … A sua formula é : n(5n-3)/2;

f) Os octogonais, que são o 1, 8, 21, 40, 65, … Para descobrirmos estes números, adicionamos de 6 em 6, a começar pelo um. Isto é: 1 + 7 + 13 + 19 + 25, …, dado que 8 = 1+ 7; 21 = 1 + 7 + 13,.... A sua fórmula é: n(3n-2);

g) Os hexanúmeros, que são o 1, 7, 19, 37, 61, …Para descobrirmos estes números, vemos a diferença entre cada um deles e concluímos que são os múltiplos de 6, pois 7 – 1 = 6; 19 – 7 = 12; 37 – 19 = 18,...

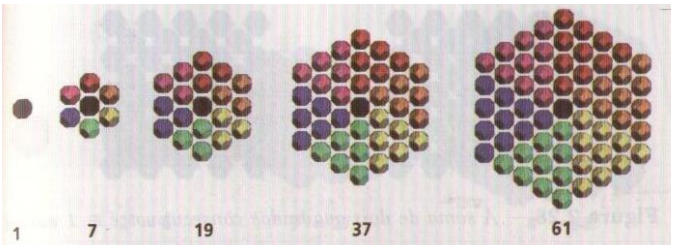


Figura 9 – Os hexanúmeros.

h) Os quadrados centrados, que são o 1, 5, 13, 25, 41, … Estes têm como propriedade a adição de dois quadrados consecutivos, dos quais um é par e o outro é ímpar. Por exemplo:

5 = 1 + 4; 13 = 4 + 9; etc. A diferença entre os seus termos são os múltiplos de 4, pois 5 – 1 = 4; 13 – 5 = 8; 25 – 13 = 12; 41 – 25 = 16, ou seja, basta adicionar ao termo anterior, o múltiplo seguinte de 4, sendo outra das formas possíveis de obtê-los.

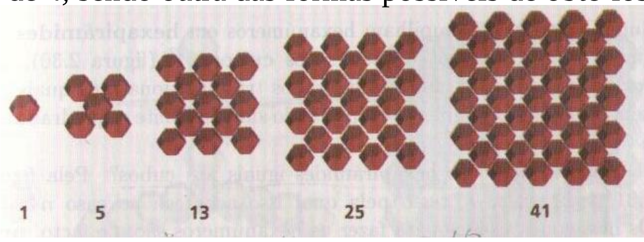


Figura 10 – Os quadrados centrados.

i) Os retangulares (ou oblongos), que são o 2, 6, 12, 20, … Para obtermos estes números, basta multiplicar os números naturais de forma sucessiva, dois de cada vez, como se pode observar na figura:

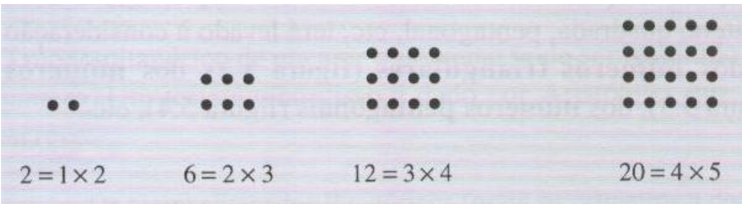


Figura 11 – Os números retangulares.

Se apreciarmos melhor estes números e principalmente na sua disposição geométrica, estes números são o dobro dos triangulares. Outra propriedade interessante é que, ao contrário dos números quadrados que podiam ser considerados como uma adição de números ímpares consecutivos, os oblongos podem-se obter através da adição de números pares consecutivos.

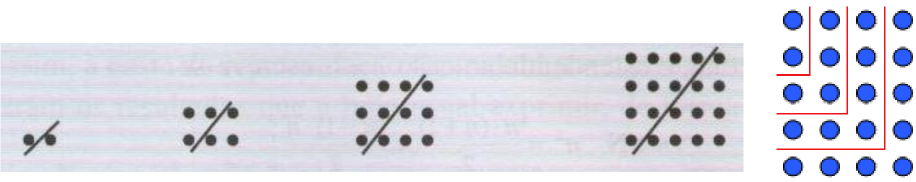


Figura 12 – Os números retangulares como o dobro dos números triangulares e adição de números pares consecutivos.

O n-ésimo número retangular obtém-se através da expressão: n x (n + 1), que é igual a $n^2 + n$. Como são o dobro dos triangulares, a expressão destes era $(n^2 + n) / 2$. Logo, se se pretende obter números retangulares, será o dobro. Não é necessário dividir por dois.

Se passarmos para a terceira dimensão, também podemos ter números figurados, nomeadamente:

j) As hexapirâmides ou os cubos, que são o 1, 8, 27, 64, 125, … Para os obtermos, basta apenas elevar n^3.

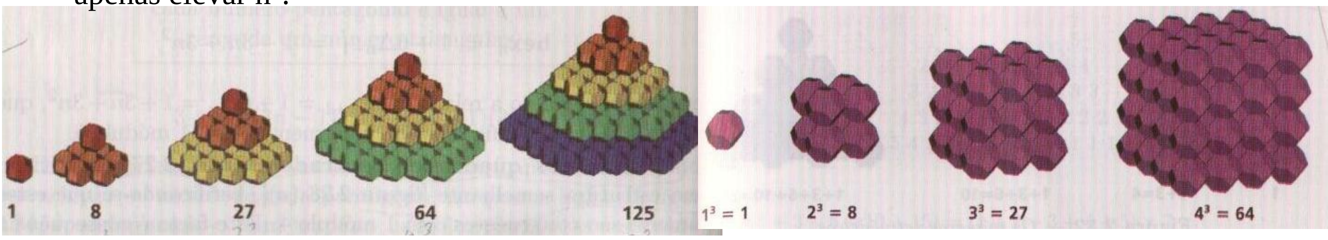


Figura 13 – Os números cubos.

k) Os tetraédricos ou piramidais triangulares, que são o 1, 4, 10, 20, … Para isso obtemo-los através da adição dos números triangulares. Observemos os cálculos na figura:

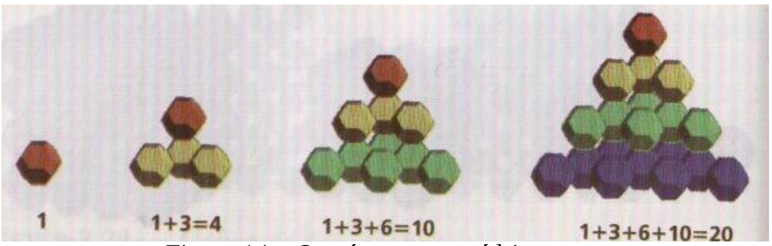


Figura 14 – Os números tetraédricos.

Uma propriedade interessante destes números passa pela existência de números ímpares, de 4 em 4 termos. Isto é: **1,** 4, 10, 20, **35**, 56, 84, 120, **165,** 220, 286, 364, **455,** …

l) Os piramidais quadrados, que são o 1, 5, 14, 30, 55, … Para obtermos estes números, basta somarmos os números quadrados, por exemplo: $5 – 1 = 4 = 2^2$; $14 – 5 = 9 = 3^3$; $30 – 14 = 16 = 4^4$; e assim sucessivamente.

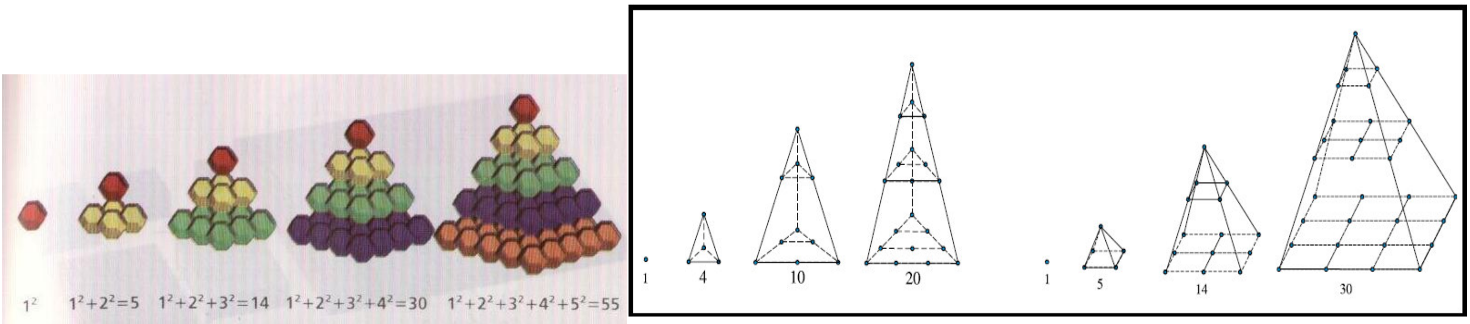


Figura 15 – Os números piramidais quadrados.

Uma propriedade interessante é que cada número piramidal quadrado é a soma de dois tetraédricos consecutivos. Por exemplo, 5 = 1 + 4; 14 = 4 + 10; 30 = 20 + 10; etc.

m) Os octaédricos, que são o 1, 6, 19, 44, 85,... Estes números são a soma de dois piramidais quadrados consecutivos. Por exemplo, o 6 = 1 + 5; 19 = 14 + 5; 44 = 30 + 14; 85 = 55 + 30;... Observemos a seguinte figura:

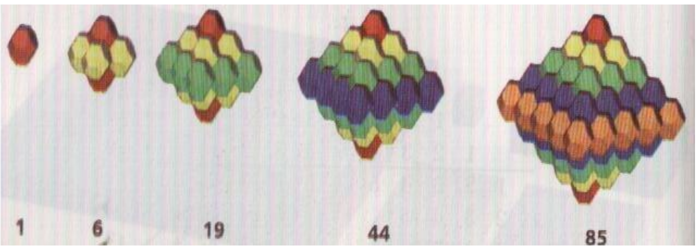


Figura 16 – Os números octaédricos.

Se calcularmos as diferenças entre dois números octaédricos consecutivos, obtemos os números quadrados centrados (1, 5, 13, 25, 41, 61, …).

Para acabar esta segunda parte, apraz dizer que existem mais números, mas não iremos abordá-los, pois seria uma abordagem exaustiva.

1.9. A sequência de Fibonacci

Fibonacci – Breve biografia

Segundo Reimer e Reimer (1990), Mendes (2007) e Pappas (2001), Leonardo Fibonacci nasceu em Itália, na cidade de Pisa em 1170 (alguns autores apontam para 1180) e foi um matemático italiano. O seu nome, Fibonacci, significa “filho de Bonacci”. O pai de Fibonacci era um mercador que trabalhou no norte de Africa, e por isso, Fibonacci foi iniciado nos negócios e nos cálculos, o que despertou o seu interesse pela Matemática. Ao reconhecer que a aritmética com algarismos arábicos, era mais simples e eficiente do que com os algarismos romanos, Fibonacci viajou por todo o mediterrâneo, chegando até Constantinopla, para estudar com os matemáticos árabes, alternando os estudos com a atividade comercial. Muitas das suas aprendizagens se devem às obras de al-Khwarizmi, de Abu Kamil e de outros mestres árabes.

Foi no regresso à Itália, em 1202, que escreveu o “Liber Abaci”, que traduzindo significa “livro do ábaco” ou “livro do cálculo”. Esta obra introduz os números árabes e alguns problemas matemáticos e foi baseada em partes da Aritmética e Álgebra que Fibonacci acumulou enquanto viajava. Ficou conhecido pela sequência de Fibonacci e pela introdução da numeração árabe na Europa.

Fibonacci morreu em 1250. Os seus estudos foram tão importantes que criaram uma publicação periódica “Fibonacci Quarterly” dedicada à sequência de Fibonacci. Existe também um asteróide que também tem o seu nome, o “6765 Fibonacci”.

Fibonacci escreveu quatro livros, que são o (1) **Líber abacci (1202),** que foi revisto em 1228. Foi neste livro que Fibonacci falou pela primeira vez do problema dos coelhos; (2) O **Practica geometriae (1220),** onde descreve seus conhecimentos sobre Geometria e Trigonometria; (3) O **Flos (1225),** neste manuscrito, Fibonacci apresenta as soluções de três problemas que lhe tinham sido colocados por João de Palermo, um membro da corte do Imperador Frederico II e por último, (4) o **Liber quadratorum (1225),** que é o maior livro que Fibonacci escreveu, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo uma aproximação correta até a nona casa decimal.

A sequência de Fibonacci

A este matemático se associa a sequência de números de Fibonacci, pois esta sequência surge associada à resolução de um problema que este matemático apresentou no seu livro, que concernia ao crescimento de uma população de coelhos. Esta sequência começa pelo número 1 e o número seguinte é obtido através da soma dos dois termos anteriores, ou seja, 1; 1; 1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3; 2 + 3 = 5; 3 + 5 = 8; 5 + 8 = 13; … Ou seja, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … Esta sequência foi apelidada de Fibonacci pela primeira vez, pelo matemático francês Edouard Lucas, visto que editou um trabalho em que ligou o nome Fibonacci à sequência numérica que era a solução do problema do Liber Abaci (problema dos coelhos).

Se se construir quadrados que tenham como medida de lado cada número da sequência de Fibonacci e se os colocarmos de forma geométrica, é possível traçar uma espiral perfeita, que também aparece em diversos organismos vivos. Outra curiosidade é que os termos da sequência também estabelecem a chamada “proporção áurea”, muito usada na arte, por ser considerada agradável aos olhos e por estar associada ao número de ouro (também conhecido pela razão de Phídeas, razão áurea, razão de ouro, divina proporção ou número áureo). Este é considerado como o símbolo da proporcionalidade. A designação adoptada para este número ϕ (Phi maiúsculo), é a inicial do nome de Fídias que foi o escultor e arquiteto encarregado da construção do Pártenon, em Atenas. Este número irracional é considerado por muitos como o símbolo da harmonia.

Segundo Bolt (2001), se dividirmos os números de Fibonacci (um número pelo que o antecede), sucessivamente, iremos estar cada vez mais próximos do número de ouro, que é 1, 618 033 989…, que se arredondarmos fica 1,618.

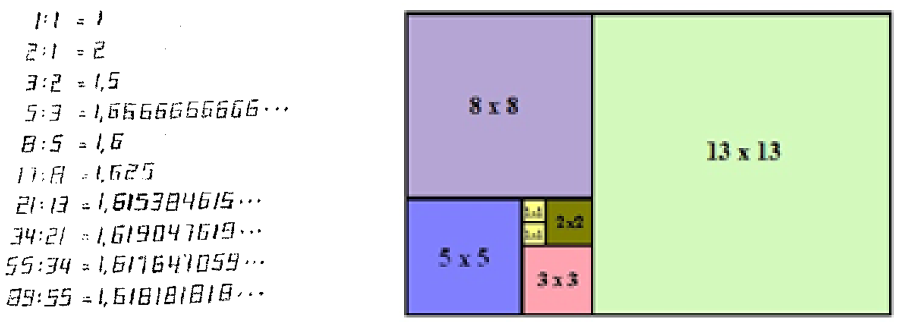


Figura 17 – A sequência de Fibonacci que forma o número de ouro e os quadrados construídos a partir da mesma.

Traçando uma diagonal em cada quadrado de modo que as diagonais traçadas se encontrem nos vértices, obteremos uma espiral. Se trocarmos as diagonais traçadas por curvas realizadas com um compasso, a espiral será curvilínea. A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..., corresponde aos lados dos quadrados que formam essa espiral.

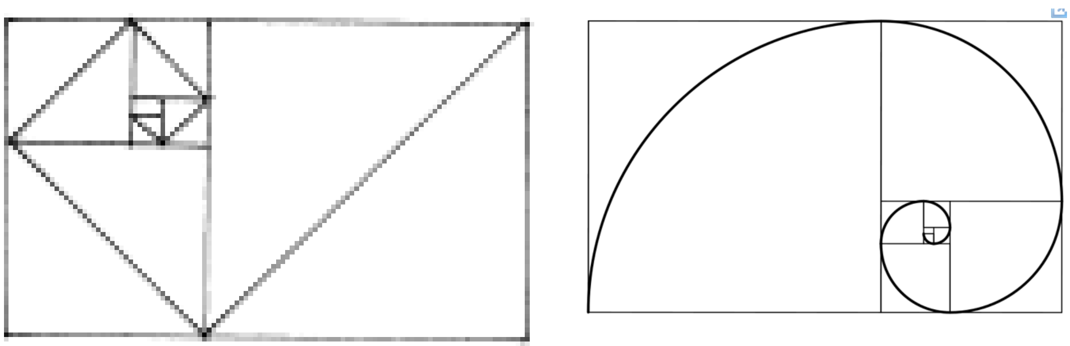


Figura 18 – As espirais formadas a partir da sequência de Fibonacci.

O primeiro quadrado terá os lados com medida 1, o segundo também, o terceiro terá os seus lados com medida 2, o quarto com medida 3, o quinto com medida 8 e assim sucessivamente. Contudo, podemos usar um compasso para traçar uma espiral (espiral de ouro). Para isso, podemos traçar com o compasso quartos de círculos dentro de cada quadrado, começando pelo quadrado mais pequeno, em direção ao maior (ou vice-versa).

O pentágono regular da escola pitagórica (ou estrela pentagonal) também contém a proporção áurea. Se considerarmos a figura seguinte e medirmos os traços A e B, verificamos que A é maior que B. Contudo, A é 1,618…vezes maior que B. As suas diagonais formam uma estrela.

Os pitagóricos estudavam as propriedades dos números. Um dos números que focou o seu interesse foi o número de ouro, número irracional que aparece em várias áreas, tornando-se assim, enigmático e misterioso.

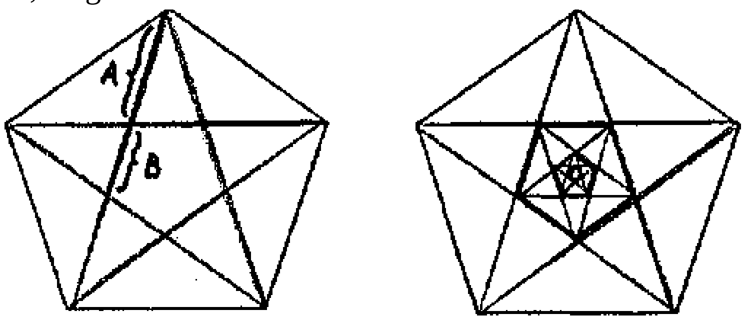
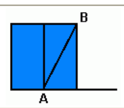
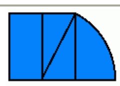


Figura 19 – Estrelas pentagonais.

Um retângulo considerado perfeito é o retângulo de ouro. Este retângulo é importante porque a razão entre o lado maior e o menor é o número de ouro. Observemos como se constrói, segundo Mendes (2007):

Constrói um quadrado;	
Divide um dos lados do quadrado ao meio;	
Traça uma diagonal do vértice A do último retângulo ao vértice oposto B e estende a base do quadrado;	
Usando a diagonal como raio, traça um arco do vértice direito superior do retângulo à base que foi estendida;	

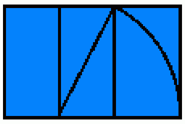
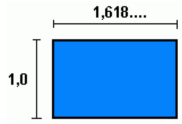
Pelo ponto de interseção do arco com o segmento da base traça um segmento perpendicular à base. Estende o lado superior do quadrado até encontrar este último segmento para formar o retângulo;	
E por fim, obtemos o retângulo Áureo!	

Figura 20 – Processo de construção do retângulo de ouro.

A razão áurea compreende os dois segmentos resultantes em que o quociente entre as medidas do segmento todo pela parte maior é igual ao quociente entre as medidas da parte maior com a parte menor, isto é: AC/ AB = AB/ BC.

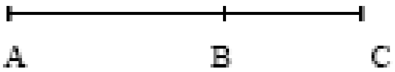


Figura 21 – Segmentos de reta.

Uma curiosidade é que, tal como ilustra Pappas (2001) e Bolt (1991), esta sequência está presente no Triângulo de Pascal. Este triângulo constrói-se de forma recursiva, ou seja, as diagonais de fora são formadas por 1, os restantes números são a soma dos números acima, dois a dois.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Figura 22 – Triângulo de Pascal.

Neste triângulo está presente a sequência de Fibonacci, que aparece através da soma dos números em diagonal, como se pode observar na fig. seguinte:

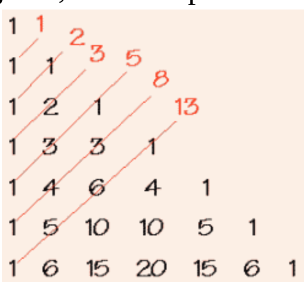


Figura 23 – A forma como podemos ver a sequência de Fibonacci no Triângulo de Pascal.

Na natureza

Os números de Fibonacci também estão presentes na natureza. É possível encontrá-los nas copas das árvores ou até mesmo no número de pétalas das flores, nos frutos (como por exemplo o ananás), nas pinhas, nas formas espirais das galáxias, entre outros.

Nas plantas

Em algumas plantas, o número de pétalas é um número de Fibonacci, pois:

1 pétala: jarros e antúrios;

2 pétalas: flores de mirtilo;

3 pétalas: lírios, íris;

5 pétalas: botões de ouro, alecrins do norte, orquídeas, ciclames;

8 pétalas: delfínios, anémonas, tormentilhas, cosmos; algumas rosas (quando estão fechadas);

13 pétalas: malmequeres, crisântemos;

21 pétalas: girassóis, arctotis;

34 pétalas: dálias, girassóis;

21, 34, 55; 89 pétalas: margaridas, girassóis.

Algumas destas flores têm mesmo este número preciso de pétalas, outras podem variar mas sempre com um número de pétalas próximo de um número da sequência de Fibonacci.

As sementes do girassol estão dispostas em dois conjuntos de espirais: 21 no sentido horário e 34 no sentido anti-horário. Também já foram encontradas 34 e 55 espirais, 13 e 21; 55 e 89; 89 e 144 espirais.

Nas árvores

Se cortarmos os ramos das árvores, podemos verificar que esta sequência também está presente em algumas árvores. Observemos a imagem da figura 24: começando em baixo, na linha 1, temos apenas o tronco, na linha 2, o mesmo tronco, na linha 3 temos 2 ramos, na linha 4 temos 3 ramos, na linha 5 temos 5 ramos, na linha 6 temos 8 ramos e assim sucessivamente… Imaginemos que nasce um novo rebento de um ramo a cada mês, sendo que um rebento leva dois meses para produzir o seu primeiro rebento. Este tipo de comportamento que é semelhante aos casais de coelhos acontece em algumas plantas, como por exemplo no caso da Achillea ptarmica, que é semelhante à ilustração reproduzida na fig. 24:

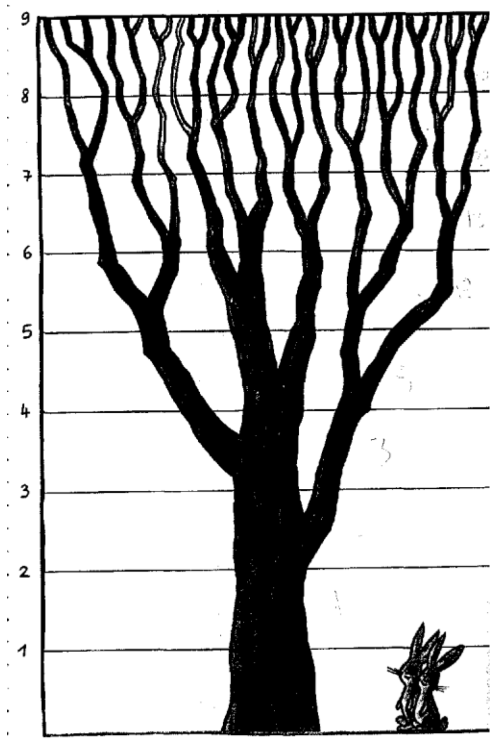


Figura 24 – Esquema retirado do livro: “O diabo dos números” de Hans Magnus Enzensberger.

Nos animais

> “As conchas são as esculturas da natureza” (Cerasoli, 2008, p. 159). “Que lindo, exclamou Filo. Parece o vórtice das tempestades solares, ou a figura da expansão da nossa galáxia!” (p. 162). “Sabes uma coisa, tio? A espiral, assim como o número de ouro e como os números de Fibonacci, produzem verdadeiros milagres, visto que conseguem criar de tudo, das conchas às margaridas. Que belo trio!” (p. 164).

Um camaleão quando se enrola, o seu rabo parece a espiral de Fibonacci; as presas do elefante, se crescessem teriam o formato da espiral; o crescimento das conchas dos moluscos náuticos (Nautilus), os chifres das cabras da montanha, as garras dos animais e os rabos do cavalo marinho, do camaleão quando está enrolado e a proporção entre abelhas fêmeas e abelhas machos em qualquer colmeia, são situações da presença desta espiral. Também se encontra nas margaridas e nos girassóis. As próprias estruturas do ananás, da pinha e da couve-flor são todas constituídas por vários géneros desta espiral. O número destas espirais corresponde quase sempre a um número de Fibonacci. Por exemplo, na margarida, existe 13 num sentido e 21 noutro. No girassol existem 35 e 55, ou outro par de números consecutivos de Fibonacci.

Figura 25 - Concha do Nautilus.

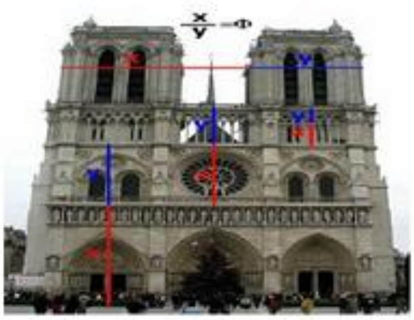
Figura 26 - Rabo do camaleão.

Na arquitetura

As pirâmides de Khéops, em Gize, no Egipto, foram construídas baseadas na razão de ouro, pois a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro. As câmaras no interior das pirâmides também obedecem esta razão, pois as medidas dos comprimentos das salas são 1,618 vezes maiores que as das larguras.

Figura 27 – As pirâmides de Khéops e desenho da sua construção.

A igreja de Notre Dame em Paris contém as proporções áureas. Na Grécia, em Athenas, os arquitetos gregos já conheciam esta proporção e tinham consciência do seu efeito harmonioso. A largura e a altura da fachada do templo Parténon em Athenas (construído no século V a.C., atualmente em ruínas), é o exemplo da presença da proporção áurea, o que mostra a preocupação de Phideas em construir algo maravilhoso. Provavelmente, os seus construtores tinham um conhecimento intuitivo desta proporção. As grandes catedrais da idade média também possuem esta proporção.



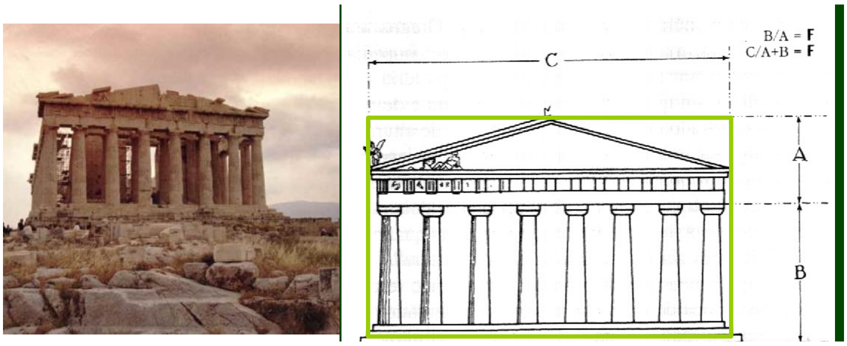


Figura 28 - Igreja de Notre Dame. Figura 29 - Templo Parthenon e esboço.

Outros edifícios onde se pode verificar a proporção áurea são a Universidade de Moscovo (Rússia), o arco de Septímio Severo (Roma), o arco de Triunfo (Paris), o Castelo de Buda (Budapeste), o Museu das Belas Artes (Estocolmo) e o Parlamento Alemão (Berlim).

Figura 30 – Universidade de Moscovo. Figura 31 – Arco Septímio Severo. Figura 32 – Arco de Triunfo.

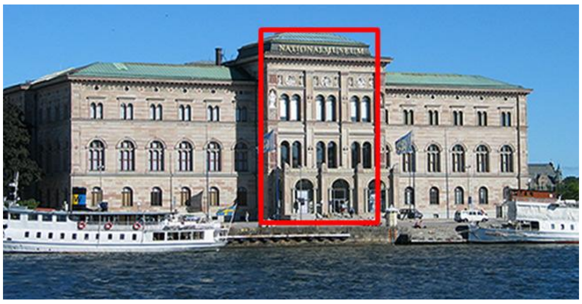


Figura 33 – Castelo de Buda. Figura 34 – Museu das Belas Artes.

Figura 35 – Parlamento Alemão.

Nas artes

Na pintura

Este recurso matemático também esteve presente no quadro de Monalisa, de Leonardo da Vinci, pois este usa esta razão na relação entre o tronco e a cabeça e entre elementos do rosto, como forma de garantir a perfeição, a beleza e a harmonia nas suas obras. Se desenhar um retângulo na face, será um retângulo de ouro. Se subdividirmos o retângulo na linha dos olhos, o novo retângulo é de ouro.

Outro exemplo é a obra "Homem vitruviano", que é um corpo de um homem dentro de um círculo e de um quadrado (figuras também consideradas perfeitas) e chamou Vitrúvio, devido ao arquiteto Marco Vitrúvio, pois este desafio de o colocar dentro destas duas figuras foi-lhe sugerido. Deitado de barriga para cima, com as mãos e pernas abertas, o corpo masculino poderia ser circunscrito tendo o umbigo como centro do círculo. Segundo Vitrúvio, a largura dos braços era igual à altura do corpo, como podemos verificar pelo quadrado. Da Vinci consegue então esboçar as ideias de Vitrúvio. Nessa imagem, Leonardo da Vinci mostrou como a proporção de ouro se encontra relacionada com a estrutura do corpo humano (em média). Outros quadros onde estão presentes esta proporção são "S. Jerónimo" e "A anunciação" (neste, da Vinci fez o quadro com dimensões nas quais o mesmo pode ser decomposto num retângulo de ouro).

Figura 36– Leonardo da Vinci – "Homem Vitruviano".

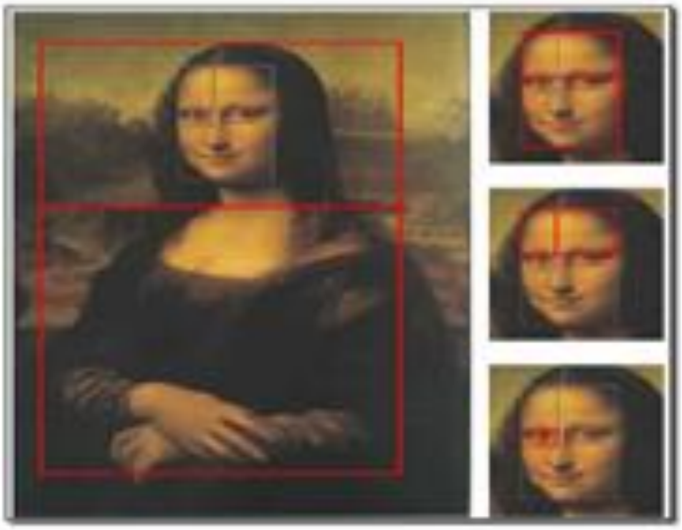


Figura 37– Leonardo da Vinci – "Mona Lisa".

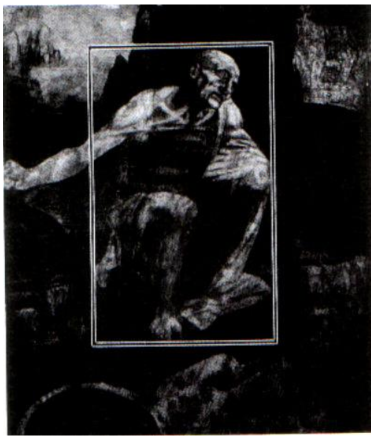


Figura 38 – Leonardo da Vinci – “S. Jerónimo”. Figura 39 – Leonardo da Vinci – “A anunciação”.

Figura 40 – George Seurat – “Os banhistas”.

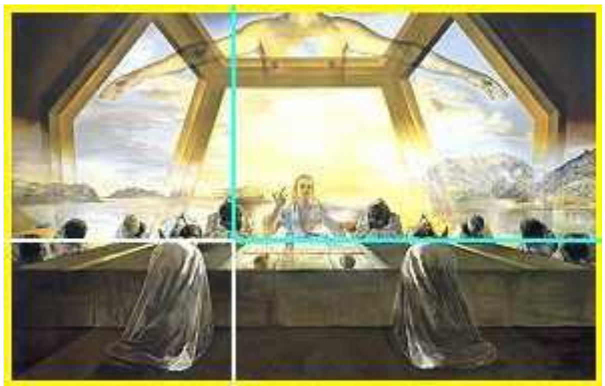


Figura 41 – Salvador Dali – “A última Ceia”.

No quadro de Salvador Dali “A última Ceia”, as suas dimensões são: 270 cm e 167 cm (aproximadamente). Se calcularmos a razão entre as suas dimensões, obteremos um número aproximado ao número de ouro e o foco da foto está em João Batista, o discípulo preferido de Jesus. Outro quadro famoso é o de George Seurat “Os banhistas”, onde podemos verificar pelo menos dois retângulos de ouro (um no menino que está sentado e o outro no menino que está dentro da água, que está mais perto do menino sentado).

Outros pintores que utilizaram a razão áurea foram: Mondrián, Picasso, Dali, entre outros. Em Portugal, ao visitar o Tribunal de Contas de Lisboa, pode-se observar um painel de Almada Negreiros dedicado a estes temas – “O Número”.

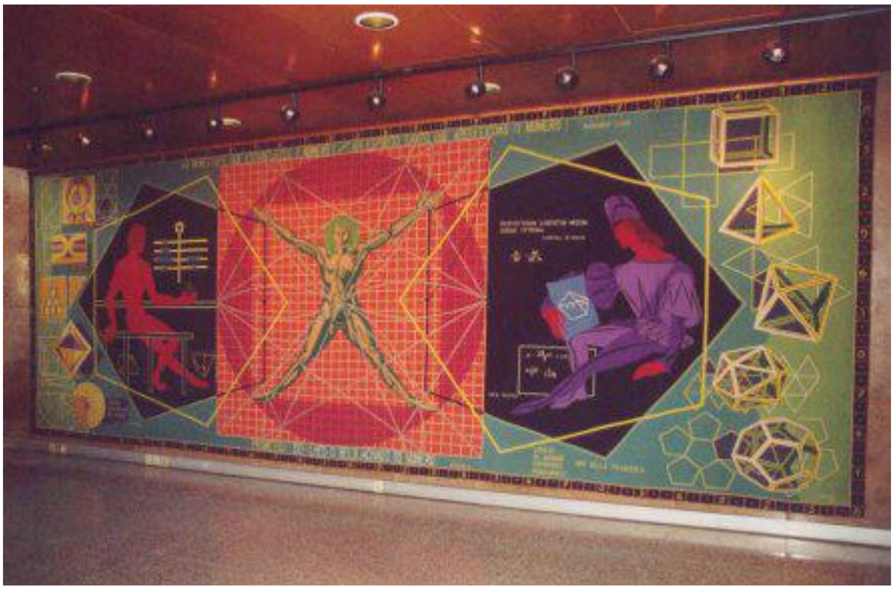


Figura 42 – Painel de Almada Negreiros, “O número”.

Na música

Stradivarius utilizou o número de ouro na construção dos seus violinos. Também aparece na 9.ª sinfonia de Beethoven.

Figura 43 – Presença da proporção aúrea no violino.

Nos objetos quotidianos e em outras áreas

Segundo Ruas e Grosso (2002), o número de ouro também está presente nos vários cartões, janelas, embalagens, bandeiras, fotos, jornais, bilhete de identidade, caixas de fósforos, bandeiras e livros. Também aparece em fenómenos naturais, tais como o comportamento da luz, dos átomos,… Estamos todos ligados a uma proporção em comum!

1.10. Adequação didática das tarefas

Godino (2011) defende que a adequação matemática de tarefas tem que obedecer a seis componentes, e são elas: adequação epistémica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica. Passaremos a explicar cada uma destas componentes.

- ✓ A adequação epistémica: refere-se ao grau de representação dos significados institucionais implementados ou pretendidos, em relação a um significado de referência. Esta componente envolve os problemas, linguagens, procedimentos, definições, propriedades e argumentos. Como se pode comparar ao esquema da figura 44, em termos de adequação epistémica, o que é exigido numa tarefa matemática é semelhante.
- ✓ A adequação cognitiva: expressa o grau em que os significados pretendidos ou implementados estão na zona de desenvolvimento potencial dos alunos, assim como a proximidade dos significados pessoais conseguidos dos significados pretendidos ou implementados.
- ✓ A adequação interacional: um processo de ensino aprendizagem terá maior adequação interacional se as trajetórias didáticas permitam identificar conflitos (que se possam detetar à priori) e que permitam resolver estes mesmos conflitos durante o processo de construção de conhecimentos. Está relacionado com o diálogo entre o professor e alunos, bem como entre os alunos.
- ✓ A adequação mediacional: consiste no grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.
- ✓ A adequação afetiva: está relacionada com o grau de implicação (interesse, motivação, empenho) dos alunos no processo de construção de conhecimentos. Esta componente está relacionada com a instituição, com o professor, mas também com o historial do aluno (em termos de escola e mesmo a nível pessoal).
- ✓ A adequação ecológica: é a componente que está relacionada com o ajustamento entre o currículo, projeto educativo da escola, ou outro documento oficial, com a turma, com os alunos especificamente, com o professor e até com a sociedade que os envolvem.

Para a realização das tarefas, outro dos esquemas que serviu de orientação foi o de componentes e relações numa configuração epistémica que é semelhante a adequação epistémica de Godino, em que temos a situação, neste caso, são os números figurados e a sequência de Fibonacci. As definições são os conceitos que estão ligados à situação, neste caso, poderíamos abordar o que são números figurados, números triangulares, números quadrados, o que é uma sequência, termo, ordem, lei de formação, sequência de Fibonacci, entre outros. Os procedimentos indicam a forma como se irá abordar. Proposições são as afirmações que podemos enunciar, sendo elas verdadeiras ou falsas e justificar, como por exemplo: um número quadrado é a soma de dois triangulares consecutivos, entre outras.

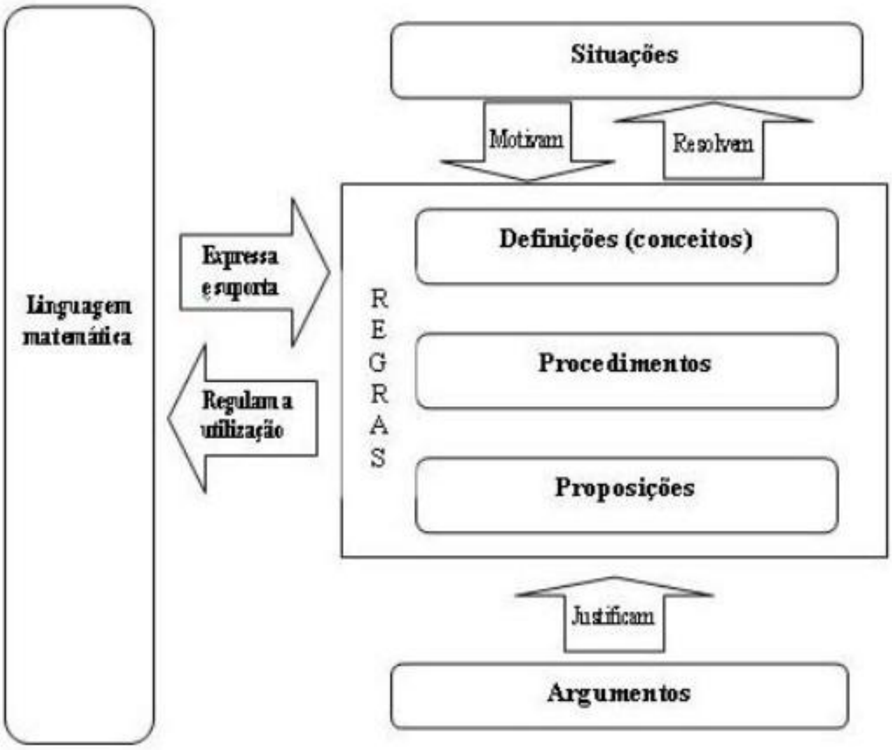


Figura 44– Componentes e relações numa configuração epistémica de Vicenç Font (2007)*.

Quando se está envolvido numa atividade, realiza-se uma certa tarefa, sendo esta, o objetivo da actividade. Não basta seleccionar boas tarefas, pois é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula. Existem muitos tipos de tarefas matemáticas, são elas: os problemas, os exercícios, as investigações e as tarefas de exploração, segundo Ponte (2005). As definições de cada um destes tipos ainda são algo subjetivas. Iremos explicá-los a seguir.

Em relação ao primeiro tipo referido, alguns problemas são para alguns alunos problemas, enquanto que para outros não passará de um mero exercício. O professor deve propor problemas aos seus alunos para que estes se possam sentir desafiados nas suas capacidades matemáticas e assim experimentar o gosto pela descoberta, perceber a verdadeira natureza da Matemática e desenvolver o seu gosto por esta disciplina. Um problema comporta sempre um certo grau de dificuldade. No entanto, se o problema for demasiado difícil, pode levar o aluno a desistir rapidamente. Se o problema for demasiado acessível, não será um problema mas sim um exercício.

Quanto aos exercícios, a questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para os resolver. Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema. Em todas as questões está perfeitamente indicado o que é dado e o que é pedido. Isso é típico dos problemas e dos exercícios. Já o mesmo não acontece com outros tipos de questões matemáticas, como analisaremos à frente. Os exercícios servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos, ou seja, para a consolidação de conhecimentos. Reduzir o ensino da Matemática à resolução de exercícios origina riscos de empobrecimento nos desafios propostos e de desmotivação dos alunos. Os exercícios são muito importantes nas tarefas, mas mais importante do que fazer muitos exercícios será fazer exercícios que testem a compreensão dos conceitos fundamentais por parte dos alunos.

O mesmo autor afirma que no que concerne às investigações, estas são importantes, porque, mais do que nos problemas, promovem o envolvimento dos alunos, pois requerem a sua participação ativa desde a primeira fase do processo, nomeadamente, a formulação das questões a resolver e o processo de pesquisa de informação para resolver a tarefa.

Por último, o autor acrescenta que quanto às tarefas de exploração, estas são parecidas às de investigação. Contudo, a diferença reside no grau de desafio, pois se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, será uma tarefa de investigação.

O autor conclui que existem duas dimensões das tarefas que são o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio matemático relaciona-se com a percepção da dificuldade de uma questão para graduar as questões que se propõem aos alunos. Varia, naturalmente, entre as extremidades de desafio “reduzido” e “elevado”. O grau de estrutura é uma dimensão que varia entre os pólos “aberto” e “fechado”. Uma tarefa fechada é aquela onde é dito tudo o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que permite um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas. Se juntarmos estas duas dimensões, obtêm-se quatro quadrantes, em que se situam neles os quatro tipos de tarefas atrás apresentadas:

- ✓ Uma exploração é uma tarefa aberta e de desafio reduzido (1.º quadrante);
- ✓ Um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido (2.º quadrante);
- ✓ Um problema é uma tarefa fechada, mas com elevado desafio (3.º quadrante);
- ✓ Uma investigação tem um grau de desafio elevado e é uma tarefa aberta (4.º quadrante).

Observemos o seguinte esquema que representa a relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e abertura.

Figura 45 – Tipos de tarefas consoante o grau de desafio e de abertura, segundo Ponte (2005).

O trabalho com padrões podem envolver estes tipos de tarefas, pois como já vimos anteriormente, existem problemas que para serem resolvidos necessitam da descoberta da sequência. A relação que as sequências têm com os exercícios pode ser notória quando se pede a descoberta de vários termos e podem ser tarefas de exploração ou investigação, consoante a presença de questões (exploração), bem como a própria investigação em descobrir a regularidade existente.

Capítulo 2 – Metodologia de investigação

Este capítulo destina-se a descrever a metodologia adotada no âmbito deste estudo.

Segundo Reis (2010), "a palavra «metodologia» resulta da combinação das palavras *méthodos* (do grego, organização) e *logos* (do grego, palavra, estudo, razão), ou seja, é o estudo da organização, dos caminhos a serem percorridos, para se realizar uma pesquisa ou um estudo" (Reis, 2010, p. 57). Para esta autora, o seu termo significa um método particular de aquisição de conhecimentos, uma forma ordenada de encontrar respostas para questões e, por isso, um caminho que conduz a um fim e pode ser considerado também como um conjunto de técnicas, métodos e procedimentos utilizados para a realização de uma pesquisa. Para Gauthier (2003), metodologia é o vocábulo associado à ciência que estuda os métodos científicos, como as técnicas de investigação. "A metodologia engloba a estrutura do espírito e da forma da investigação como as técnicas utilizadas para pôr em prática este espírito e esta forma" (Gauthier, 2003, p. 22).

2.1. Opções metodológicas

Este estudo tem como finalidade analisar as estratégias que os alunos usam e as dificuldades que revelam durante a aplicação da unidade de ensino sobre números figurados e a sequência de Fibonacci. Atendendo à natureza das questões de investigação já referidas, optou-se por uma investigação qualitativa, caracterizada por Bogdan e Biklen (1994). Segundo estes autores, "os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, (…) e de complexo tratamento estatístico" (Bogdan e Biklen, 1994, p. 16).

Para estes autores, a investigação qualitativa apresenta cinco características:

1. "*Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.* Os investigadores introduzem-se e despendem grandes quantidades de tempo em escolas (…) tentando elucidar questões educativas. Ainda que alguns investigadores utilizem o equipamento vídeo ou áudio, muitos limitam-se exclusivamente a utilizar um bloco de apontamentos e um lápis. Contudo, mesmo que se utilize o equipamento, os dados são recolhidos

em situação e complementados pela informação que se obtém através do contato direto. (…) Quando os dados em causa são produzidos por sujeitos, (…) os investigadores querem saber como e em que circunstâncias é que eles foram elaborados.” (p. 47 e 48).

2. “*A investigação qualitativa é descritiva.* Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com bases nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. (…) Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma como estes foram registados ou transcritos.” (p. 48).
3. *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.*” (p. 49).
4. “*Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva*. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. (…) A direção desta só se começa a estabelecer após a recolha dos dados e o passar do tempo com os sujeitos. (…) Está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes. O processo de análise dos dados é como um funil: as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo.” (p. 50).
5. “*O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.* Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas. Por outras palavras, os investigadores qualitativos preocupam-se com aquilo que se designa por perspetivas participantes.” (p. 50).

Estas características adequam-se a este estudo, dado que: (1) a fonte direta dos dados é uma turma do 5.º ano e os dados recolhidos correspondem as produções escritas dos alunos, as notas de campo produzidas pela investigadora, a observação que esta efetuou (bem como a observação que as colegas da PPS realizaram), pois a investigadora é o principal instrumento de recolha de dados, dado que as informações recolhidas nas sessões permitem uma melhor compreensão das acções e produções dos alunos; (2) a investigação qualitativa é descritiva dado que os dados recolhidos foram as produções dos alunos e as notas de campo da investigadora, o que faz que sejam descrições do que foi ocorrendo nas sessões; (3) este estudo tem como finalidade analisar o que eles fizeram durante este processo, embora também seja importante perceber a evolução deles até ao final do mesmo, tais como as dúvidas que eles tiveram, o que eles descobriram antes de abordarmos as sequências, ou seja, realça o processo; (4) é importante perceber quais as principais dificuldades que os alunos tiveram durante a aplicação da unidade de ensino, e muitas vezes, só com alguma recolha de dados é que é possível tomar uma certa direção na investigação e por último (5) o significado que os alunos têm para dar a conhecer o que fizeram durante a unidade de ensino, bem como a apresentação das suas opiniões.

A Investigação – Ação

Um dos métodos mais frequentes é o da investigaçção-ação. Desde já, apraz fundamentar o conceito de investigação. Segundo Gauthier (2003), investigação "é uma atividade de procura objetiva de conhecimentos sobre questões factuais" (Gauthier, 2003, p. 18). Esta é a metodologia que é realizada por alguém que tem necessidade de obter o conhecimento sobre uma situação/problema com o objetivo de agir sobre ela e dar-lhe uma solução.

Uma das formas de investigação é a investigação-ação. Esta relaciona-se com o professor que é investigador, pois investiga para solucionar um problema, falha ou dificuldade que encontrou e coloca-a em prática, ou seja, participa na ação. Há muitas definições de investigação-ação. Segundo Cohen e Manion (1989), citados por Bell (1997), este método é um procedimento essencial com vista a lidar com um problema concreto localizado numa situação imediata. O processo é sempre controlado, durante períodos de tempo variáveis, através de diversas técnicas, de modo que os resultados possam ser traduzidos em mudanças de direção de acordo com as necessidades de forma a trazer vantagens ao próprio processo em curso. Uma característica importante da investigação-ação é o facto do trabalho não estar terminado quando o projeto acaba, pois continua-se a rever, a avaliar e a melhorar a sua prática. Pode ser considerada também como uma abordagem que se revela atraente para os profissionais da educação, devido a sua ênfase na resolução de problemas e ao aperfeiçoamento do desempenho durante um período de tempo, através de reflexões sobre as suas práticas. Bogdan e Biklen (1994) afirmam que consiste na recolha de informações com o objetivo de promover mudanças sociais, ou seja, apresentar recomendações tendentes à mudança. "É um tipo de investigação aplicada na qual o investigador se envolve ativamente na causa da investigação" (Bogdan e Biklen, 1994, p. 293). Para Dolbec (2003), citado por Gauthier (2003), "este tipo de investigação toma como objetivo influenciar diretamente o mundo da prática" (Dolbec, 2003, p. 483), "…estes a tornarem-se investigadores reflexivos, praticantes capazes de serem críticos e sistemáticos na análise das suas intervenções educativas" (Dolbec, 2003, p. 488), "a investigação-ação é uma forma de investigação que permite aos professores refletirem de forma crítica sobre a sua experiência em sala de aula e produzirem relatórios pessoais sobre a sua experiência" (Dolbec, 2003, p. 500, in Gauthier, 2003), de forma a poderem melhorar as suas práticas, dado que envolve a investigação, a aprendizagem e a ação. Continuando no pensamento deste autor, é "um sistema de atividades humanas que visa emergir um processo colaborativo com o objetivo de produzir uma mudança no mundo natural" (Dolbec, 2003, p. 502). O estudo desenvolveu-se num contexto de investigação-ação visto que a professora estagiária foi a própria investigadora e a investigação-ação envolve professores que se envolvem numa investigação na sala de aula. Este método é um excelente guia para orientar as práticas educativas, com o objetivo de melhorar o ensino e os ambientes de aprendizagem na sala de aula. Permite a participação do investigador e dos participantes a analisar, como o objetivo de planificar, agir, observar e refletir.

O investigador-ator constrói inicialmente princípios hipotéticos em relação aos problemas que foram identificados ou às temáticas que se propõe abordar; depois planeia a ação que deverá conduzir aos melhoramentos desejados; essa ação será experimentada e recolherá a informação correspondente aos seus efeitos; essas informações serão utilizadas para rever as hipóteses iniciais e para identificar uma ação mais adequada que já reflita uma modificação dos princípios gerais, com base numa reflexão realizada, para voltar a colocar em prática, e assim sucessivamente. Assim, para se concretizar um processo de investigação-ação será necessário quatro fases: (i) descobrir uma preocupação, problema temático; (ii) construir um plano de ação; (iii) verificar como funciona o plano, recolhendo informações; (iv) refletir e replanificar. Por isso, é um processo sistemático de aprendizagem, que exige a recolha de evidências importantes para mudar as práticas. A investigação-ação é um contributo positivo para a prática educativa, dado que envolve a participação ativa do professor (ou professor estagiário) num ambiente de ação-reflexão-ação.

Esta investigação, mais uma vez, destaca-se que é de caracter qualitativo, pois as questões formuladas pretendem orientar o estudo de forma a compreender o fenómeno na sua complexidade. O investigador é quem recolhe os dados, os processos e os resultados são o principal interesse do investigador, ou seja, pretende recolher-se os detalhes para poder analisar a pesquisa e compreender de forma aprofundada, o fenómeno a estudar. Contudo, apesar de ser uma investigação-ação, neste estudo não se voltou a implementar as tarefas, devido ao tempo disponibilizado. Porém, teve-se um processo de reflexão sobre a implementação das tarefas e o que se mudaria se voltasse a implementar, com vista a uma melhoria da implementação das mesmas.

2.2. Recolha de dados

A observação

Uma das técnicas mais usadas é a observação. Para Lapérrière (2003), a observação direta "foi essencialmente empregada (…) quando havia ausência de dados e de análises empíricas sobre a situação social estudada" (Gauthier, 2003, p. 259). Segundo Ketele (1980), citado por Ketele e Roegiers (1993), "Observar é um processo que inclui a atenção voluntária e a inteligência, orientado por um objetivo final ou organizador e dirigido a um objeto para recolher informações sobre ele" (Ketele e Roegiers, 1993, p. 22). Para estes autores, este processo requer um ato de atenção, ou seja, uma concentração da atividade mental que comporta um aumento da eficiência num setor determinado e a inibição das atividades concorrentes e tem sempre um objetivo final, por exemplo observar um fenómeno sobre vários pontos de vista, familiarizar-se com uma situação, obter mais experiência, entre outros. Para Quivy e Campenhoudt (2008), os métodos de observação direta constituem os únicos métodos de investigação social que captam os comportamentos no momento em que eles se produzem, sem a mediação de um documento ou de um testemunho.

Existem vários instrumentos para usar numa observação, desde o simples bloco de notas ou caderno, até os mais sofisticados, como uma máquina de filmar. A observação estruturada, por exemplo, utiliza um roteiro ou guião.

Esta pode classificar-se quanto à estruturação e quanto à participação. Quanto à estruturação, pode ser não-estruturada (o investigador não recorre a meios técnicos e age livremente, o que pode suscitar alguma subjetividade), estruturada (o investigador utiliza elementos sistematizados, considerados relevantes para a compreensão do fenómeno em estudo, recorrendo a meios técnicos aperfeiçoados que possibilitem um nível elevado de precisão). Quanto à participação, pode ser não-participante (o observador é um espetador) e observador participante (vive a situação, sendo-lhe, por isso, possível conhecer o fenómeno em estudo a partir do interior, ou seja, examina o grupo em si, como uma coletividade). A participante permite interagir com os atores observados e também permite um nível mais elevado de precisão na informação do que a observação não-participante. Para Fernandes (1994), a observação participante é praticada por aqueles que procuram viver no todo ou em parte a experiência dos grupos que estudam, de forma a chegar a uma visão interna da vida do grupo. Esta implica que o observador se misture na vida do grupo, que se insira nas suas atividades. Neste caso, o observador é ao mesmo tempo sujeito e objeto: observa e faz parte do conjunto observado. Para Quivy e Campenhoudt (2008), a observação participante "consiste em estudar uma comunidade durante um longo período, participando na vida coletiva. O investigador estuda então os seus modos de vida, de dentro e pormenorizadamente, esforçando-se por perturbá-los o menos possível" (Quivy e Campenhoudt, 2008, p. 197). Segundo estes autores, este método permite a apreensão dos comportamentos e dos acontecimentos no próprio momento em que produzem. Nesta observação, o professor investigador tem um papel ativo na dinâmica do grupo, pois não se limita apenas a observar, mas também interage. A desvantagem passa por registar as observações após as participações, e por vezes, a memória pode falhar, por isso convém registar logo após as participações, para evitar o máximo de perdas possíveis.

Na observação participante, "é o próprio investigador o instrumento principal de observação (…). Assim, a participação está ao serviço da observação, ela tem como objetivo recolher os dados aos quais um observador exterior não teria acesso. É portanto, uma técnica de investigação qualitativa adequada ao investigador que deseja compreender um meio social que à partida lhe é estranho ou exterior e que lhe vai permitir integrar-se progressivamente nas atividades das pessoas que nele vivem" (Hébert, Goyette e Boutin, s.d., p. 155). Contudo, a principal limitação deste instrumento é a subjetividade dos observadores. Este facto é ultrapassado quando existe concordância entre os mesmos. Mas quando existe apenas um observador?

A análise documental

Outra das técnicas mais frequentes que também foi utilizada neste relatório foi a análise documental (envolve o recurso a documentos). Esta técnica depende da natureza e da quantidade dos documentos a analisar, do objeto e finalidade da investigação. É uma técnica utilizada na procura de elementos que enriqueçam o trabalho académico ou a pesquisa. Em termos de natureza dos documentos, estes podem ser escritos (desenhos, esquemas), ou documentos sonoros; publicados (livros, revistas científicas, imprensa, ou de uso específico (correio, regulamentos, manuais técnicos, documentos de formação); oficiais (textos de leis, programas de ensino, normas, ou documentos que não sejam oficiais); fechados (formulários, questionários, grelhas de avaliação, cadernos de exercícios); científicos (balanços de investigações experimentais validadas, manuais, documentos de referência); e de utilização limitada no tempo (boletim meteorológico, horários). Segundo Reis (2010), a análise documental, nomeadamente a consulta de artigos, revistas científicas, livros entre outros, serve para completar a informação obtida por outros métodos ou técnicas, ou segundo outra perspetiva, são o método de pesquisa central, e neste caso, os documentos são o alvo de estudo por si próprios.

São considerados como documentos o que existe antes e durante a investigação incluindo relatórios, trabalhos de arte, fotografias, registos, inscrições, jornais, brochuras, agendas, notas, gravações em vídeo ou áudio, notas dos alunos, discursos, entre outros.

A análise dos dados permite aumentar a compreensão sobre as informações recolhidas e esta incidiu sobre as respostas escritas pelos alunos nas tarefas propostas e nas discussões proporcionadas no final de cada tarefa, na sessão seguinte, bem como a revisão da literatura realizada anteriormente, na fundamentação teórica deste trabalho, que se recorreu algumas vezes para consultar o que já se tinha estudado.

Em termos de análise documental, serviu de grande utilidade, a recolha e a análise das resoluções dos alunos das tarefas que se propõe na proposta pedagógica. Os dados que se obteve servem de acréscimo às notas de campo. Portanto, este tipo de documentos permite analisar a forma como os alunos resolvem os problemas, permitindo assim, descobrir o tipo de estratégias que utilizam e os conhecimentos que mobilizam, bem como as dificuldades que tiveram.

As notas de campo

As notas de campo também foram usadas, pois segundo Bogdan e Biklen (1994), possibilitam-nos uma descrição das pessoas, das atividades, dos acontecimentos, das conversas, entre outros e permite o registo de reflexões. Para estes, este instrumento é "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha" (Bogdan e Biklen, 1994, p. 150). Um aspeto positivo desta técnica é que não requer tanta exigência como a generalidade dos textos escritos.

O registo fotográfico

Por último, outra técnica que foi muito utilizada nesta investigação foi o registo fotográfico. Este registo permitiu recolher alguma informação durante o desenvolvimento das tarefas e revelou-se importante para complementar a restante informação recolhida. Segundo Bogdan e Biklen (1994), a recolha fotográfica é muitas vezes utilizada como um complemento de outros instrumentos de recolha de dados e consideram que a fotografia "(...) é na maior parte das vezes utilizada como um meio de lembrar e estudar detalhes que poderiam ser descurados se uma imagem fotográfica não estivesse disponível para os reflectir. (...) fornecem-nos imagens para uma inspeção intensa posterior que procura pistas sobre relações e atividades" (Bogdan e Biklen, 1994, p 189). Para além de ser uma das formas alternativas ao registo escrito, as fotografias "dão-nos fortes dados descritivos, são muitas vezes utilizadas para compreender o subjetivo e são frequentemente analisadas." (Bogdan e Biklen, 1994, p. 183).

2.3. Caracterização do contexto pedagógico e dos participantes no estudo

Caracterização do contexto pedagógico – Colégio D. José I

Caracterização do meio local

Este colégio localiza-se na freguesia de Santa Joana, que foi criada em 1985. Em termos económicos, esta freguesia continua com alguma atividade agrícola, contudo, destacam-se as empresas dos setores secundário e terciário. O Colégio contribui, de certa forma, na economia da freguesia. Esta possui também uma vasta quantidade de infraestruturas, no ramo do apoio social, de educação, da cultura, do desporto e da religião, tendo como exemplos a Santa Casa da Misericórdia, três jardins de infância, três escolas do 1.º ciclo, este Colégio que estamos a caracterizar, o ISCIA (Instituto Superior de Ciências de Informação e Administração), o agrupamento de escuteiros, o centro de cultura e desporto de Santa Joana, o Parque de Feiras e Exposições de Aveiro, o Parque Desportivo de S. Brás, o Estádio Municipal de Aveiro, a Igreja de Santa Joana, entre outros. Em termos de localização geográfica, esta freguesia situa-se no centro do Concelho de Aveiro e tem como freguesias confinantes: Esgueira, Eixo, Oliveirinha, São Bernardo, Glória e Vera Cruz. Santa Joana tem uma área total de aproximadamente 5,83 km^2.

Caracterização do Colégio D. José I

O Colégio D. José I, criado no ano de 1997, é um estabelecimento que abrange os ensinos pré-escolar, básico e secundário, sedeado na freguesia de Santa Joana, em Aveiro. É de salientar que este Colégio é particular nas respostas sociais do pré-escolar e do 1.º Ciclo. Os outros ciclos de ensino são financiados pelo Estado. O nome D. José I deve-se ao rei que elevou Aveiro de vila a cidade. A sua oferta formativa estende-se desde os ensinos anteriormente referidos e ainda proporciona Cursos de Educação e Formação de Jovens (equivalência ao 9.º ano de escolaridade), Cursos Profissionais e Cursos de Educação e Formação de Adultos (equivalência ao 12.º ano).

O Colégio funciona todos os dias úteis, iniciando as suas atividades às 9 horas e encerrando às 18 horas. Os serviços específicos do Colégio tais como: Bar, Cantina, Papelaria/Reprografia, Serviços Administrativos, Biblioteca/Mediateca têm um horário estabelecido e devidamente divulgado.

Dado que a maior parte do tempo em que se esteve no colégio foi passado na biblioteca, deu-se ênfase a este espaço, pois tornou-se bastante familiar para o grupo. Apesar desta ter poucas mesas, contém muitos livros e materiais com que se pode trabalhar para preparar as aulas, bem como para os alunos fazerem os seus trabalhos e passarem os seus momentos de lazer.

O Colégio D. José I é composto por dois edifícios, com três pisos cada, um polivalente e uma oficina de mecânica. Em torno do Colégio existem zonas verdes, um parque infantil e o campo de jogos, permitindo aos alunos que usufruam desse espaço calmo e agradável. Quando se entra na entrada principal deste contexto, depara-se com uma grande sala polivalente, onde os alunos jogam pingue-pongue, brincam e conversam, existindo também um palco. Este polivalente é comum aos dois edifícios, o principal e o secundário. Do lado do edifício principal (ala esquerda) pode-se encontrar no rés do chão, o gabinete da Direção Pedagógica, os Serviços Administrativos, a Papelaria/Reprografia, a sala dos professores e formadores, o gabinete de Serviços de Psicologia e Orientação, a Sala de ATL do 1.º CEB, instalações sanitárias e salas de aula do pré-escolar e 1.º CEB. No 2.º piso, a Biblioteca/Mediateca, uma Sala de Informática e salas de aula. O 3.º piso é apenas composto por salas de aula. Cada sala de aula destina-se a uma turma, no geral. No edifício secundário (ala direita), no rés-do-chão, pode-se usufruir do Bar e do Refeitório. Existe também um vestuário para o pessoal não docente, as salas de Educação Visual e Tecnológica, instalações sanitárias, os balneários e uma sala de material de Educação Física. No 1.º piso, existe a sala de Educação Musical, o laboratório e salas de aula. Por último, no 3.º piso encontra-se salas de aula. De modo geral, as salas do 2.º Ciclo (as quais incidiu a nossa observação) estão organizadas em filas e permite que os professores circulem livremente pela sala e que visualizem os seus alunos. Estas salas, na sua maioria, estão equipadas com quadro interativo, computador, quadro de ardósia (sendo este usado quando falha a eletricidade), quadros de cortiça, um móvel para arrumos, entre outros recursos.

Especificando as suas respostas educativas, este contexto responde às necessidades dos alunos do pré-escolar até o Ensino Básico, assim como também, alunos dos cursos de educação e formação (Mecânica de veículos ligeiros) e dos cursos profissionais (Técnico auxiliar de saúde, Animador sociocultural e Técnico de manutenção industrial). Para além das atividades obrigatórias, o Colégio possui um vasto leque de ofertas de Atividades de Enriquecimento Curricular (AEC) e atividades extracurriculares, que são sujeitas a um pagamento mensal. As várias atividades podem ser observadas a partir da seguinte tabela:

Nível de ensino	AEC´s	Atividades extracurriculares
Pré-escolar	✓ Oficina de Inglês; ✓ Oficina de Música; ✓ Sessão de Psicomotricidade; ✓ Oficinas: Desenvolvimento Artístico, Culinária, Ciências; preparação para o 1.° Ciclo (para crianças de 5 anos de idade).	✓ Atividades Rítmicas e Expressivas; ✓ Expressão Dramática; ✓ Kempo Karate; ✓ Língua Gestual.
1.° Ciclo	✓ Atividades de Apoio ao Estudo; ✓ Atividade Física e Desportiva; ✓ Ensino de Inglês; ✓ Ensino da Música; ✓ Expressão Plástica; ✓ Sessão de Afetos.	✓ Atividades de Tempos Livres: ✓ Atividades Rítmicas e Expressivas; ✓ Expressão Dramática; ✓ Judo; ✓ Kempo Karate; ✓ Língua Gestual; ✓ Pequenos Cientistas.
2.° e 3.° Ciclos	✓ Clubes[1]: ○ Clube Verde; ○ Clube da Guitarra; ○ Clube de Multimédia; ○ Clube de Jornalismo e Fotografia; ○ Clube da Matemática; ○ Clube de Música; ○ Clube da Robótica; ○ Desporto Escolar (Basquetebol, Futsal e Ténis de Mesa); ○ Oficina das Art&Manhas; ○ Oficina de Talentos; ✓ Aulas de Recuperação.	✓ Atividades de Tempos Livres.

Tabela 1 – Atividades de Enriquecimento Curricular, Clubes e Atividades Extracurriculares que o Colégio D. José I oferece aos alunos.

No que concerne aos horários letivos, no pré-escolar e 1.º ciclo, as atividades letivas desenrolam-se das 9 às 15 horas. No 2.º e 3.º ciclos estas decorrem desde as 9h até as 16:20 ou 17:15h, dependendo dos horários, excepto à quarta-feira, que acabam às 13:25h. Os cursos de formação e profissionais podem acabar às 16:20 ou às 18h. Tal como consta nos documentos oficiais deste colégio, o 2.º ciclo é composto por 6 turmas, nomeadamente 3 no 5.º ano (A, B, C) e 3 no 6.º ano (A, B, C).

Em relação à carga horária letiva, o colégio prevê um determinado número de horas para cada disciplina, nos diferentes níveis de ensino. Mais especificamente no 2.º ciclo, os blocos são de 90 minutos e de 45 minutos, que correspondem aos números 1 e 0.5, respetivamente, como se pode observar na seguinte tabela:

Disciplinas / Áreas Curriculares não Disciplinares	**5.º ano**	**6.º ano**
Língua Portuguesa	3	3
Matemática	3	3
História e Geografia de Portugal	1.5	1.5
Ciências da Natureza	1.5	1.5
Inglês	1.5	1.5
Educação Visual e Tecnológica	2	2
Educação Musical	1	1
Educação Física	1.5	1.5
Educação Moral e Religiosa Católica	0.5	0.5
Estudo Acompanhado	0.5	1
Formação Cívica	1	0.5

Tabela 2 – Carga horária letiva das várias disciplinas, no colégio D. José I.

Em termos de avaliação, as classificações atribuídas nos testes que dão a conhecer uma parte dos resultados dos alunos estão classificadas da seguinte forma:

<table>
<tr><th colspan="2">Fichas de avaliação</th><th rowspan="2">Áreas curriculares não disciplinares</th></tr>
<tr><th>Classificação</th><th>%</th></tr>
<tr><td>Muito insuficiente</td><td>0-19</td><td rowspan="2">Não satisfaz (NS)</td></tr>
<tr><td>Insuficiente</td><td>20-49</td></tr>
<tr><td>Suficiente</td><td>50-69</td><td>Satisfaz (S)</td></tr>
<tr><td>Bom</td><td>70-89</td><td rowspan="2">Satisfaz bem (SB)</td></tr>
<tr><td>Muito bom</td><td>90-100</td></tr>
</table>

Tabela 3 – Classificações atribuídas nos testes.

Segundo o Plano Anual de Atividades e Formação (PAAF), quanto aos recursos e materiais que este Colégio disponibiliza para o bom desempenho das suas funções educativas, este tem a biblioteca e mediateca, a sala de estudo, de ginástica/judo, de música, os laboratórios de informática, de matemática, de física e química, a oficina TIC, o polivalente, entre outros. Em termos de equipamentos, este contém computadores e videoprojetores, quadros interativos, computadores portáteis, retroprojetores, leitores de CD/DVD, televisores, fotocopiadoras, *scanner*, impressoras, máquinas fotográficas digitais, sistema *wireless*, *softwares* diversos, autocarros, entre outros.

Por último, é imprescindível referir que este colégio preocupa-se com a motivação dos seus alunos, concedendo-lhes assim, um mérito escolar. O colégio tem várias classificações para os vários méritos, pois

> *[…] os alunos têm direito a ser valorizados pelas suas capacidades ou atitudes, bem como pelos seus resultados escolares; (…) o Quadro de Honra reconhece os alunos que revelam excelentes resultados escolares ou que realizam atividades de excelente qualidade, quer no domínio curricular, quer no domínio das Atividades Extracurriculares. Esta é uma forma do Colégio premiar os seus alunos não só ao nível dos seus resultados escolares, mas também das suas atitudes e valores […]* (Regulamento Interno do Colégio do José I, p. 103).

Caracterização da turma em que se abordou a sequência de Fibonacci

A turma é constituída por 29 alunos e é do 5.º ano. Tem ao seu dispor uma sala para a maior parte das disciplinas (sala 14). Em termos de materiais, esta sala possui um quadro interativo, um computador, um armário que serve para guardar o material da turma, as mesas e respetivas cadeiras. Os alunos estão sentados a pares, por norma, rapaz/rapariga. No geral, na área de matemática, a turma é favorável a nível de aproveitamento e participação, contudo, existem alguns elementos que têm algumas dificuldades. Por coincidência, também são aqueles que mais querem participar, isto porque muitas vezes quando respondem, o professor não censura as respostas erradas, mas permite aos alunos que não tenham receio de exporem as suas dúvidas. Destes 29, 3 são alunos repetentes.

No geral, a turma é participativa e interessada pelos conteúdos, pois a maior parte dos alunos manifesta sempre as suas dúvidas. São alunos que reagem com entusiasmo às tarefas propostas pelo professor e de modo geral tentam ultrapassar as suas dificuldades. Porém, à disciplina de matemática, esta turma em termos de comportamento, dado que é uma disciplina muito prática devido à resolução de exercícios, é algo agitada, principalmente à medida que o ano letivo se foi aproximando do fim.

Caracterização do clube de matemática, onde se abordou os números figurados

As tarefas relativas aos números figurados (números triangulares, números quadrados, números pentagonais e os números hexagonais) foram aplicadas no clube de matemática, que envolve alguns alunos do 5.º ao 9.º ano. Porém, estas tarefas foram abordadas apenas com os alunos do 5.º ano. Apraz referir que o ambiente de clube é um ambiente informal, em que os alunos costumavam jogar jogos de matemática e estavam numa sala de informática onde tinham acesso aos computadores e Internet para jogar jogos com conteúdos matemáticos. Por isso e sendo também um dos objetivos da aprendizagem, as tarefas podem conter um certo grau de ludicidade. Para abordar estes números figurados, em todas as sessões levou-se caricas para primeiro formarem os polígonos com recurso às mesmas, para além de enunciados, para poder obter os registos deles para mais tarde analisar. Destaca-se que estes alunos (alguns das três turmas do 5.º ano) eram alunos interessados, porém, inicialmente, como o clube é um ambiente informal, estavam num ambiente de brincadeira, em que foi necessário estipular algumas regras para uma melhor organização dos grupos e para se poder realizar estas tarefas. Contudo, apesar de ter havido algumas alterações no clube, a reação a esta mudança foi positiva, pois verificou-se o entusiasmo dos alunos nestas atividades.

Capítulo 3 – Unidade de ensino

As Sequências e regularidades fazem parte do Programa de Matemática do Ensino Básico (2007). Este documento prevê para o 2.º ciclo, no tema Álgebra, no tópico “sequências e regularidades”, como já foi referido anteriormente, “identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas; determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação; determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação; analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação utilizando a linguagem natural e simbólica” (ME, 2007, p. 41). Como forma de propor algumas tarefas para explorar sequências e regularidades foram elaboradas 7 tarefas que estão relacionadas com dois temas: Números figurados e a sequência de Fibonacci. Em relação ao primeiro tema, este é composto por 4 tarefas: Números triangulares, Números quadrados, Números pentagonais e Números hexagonais. No que concerne ao segundo tema, este é composto por 3 tarefas: O herbário de Fibonacci, O herbário de Fibonacci em verso e Vamos construir a espiral de Fibonacci.

3.1. Planificação das tarefas

A unidade de ensino foi preparada de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico e as metas curriculares das disciplinas Ciências Naturais, Português e Educação Tecnológica do contexto pedagógico onde se realizou a PPS, bem como, a importância que teve o facto de este ano ser *o ano da Matemática no planeta Terra*. Atendendo a esta esfera de documentos e factores, construiu-se uma unidade de ensino que contemplasse a transversalidade em várias áreas, pois, como se aprende na formação de professores, é possível fazer ligações entre os conteúdos e também entre as várias áreas disciplinares.

Nesta unidade “Sequências e regularidades” estudou-se os “Números figurados” e a “Sequência de Fibonacci”. Em relação aos números figurados, como se tinha visto no primeiro capítulo, existem várias “famílias” de números figurados, mas dado o tempo e disponibilidade de implementação por parte dos professores, resolveu-se abordar os números triangulares, os números quadrados, os números pentagonais e os números hexagonais no clube de matemática, dado que o grupo de estágio era de 3 elementos. Este tema, por motivos de disponibilidade dos professores para a sua implementação e com o objetivo de não interferir com o normal funcionamento das atividades letivas, foi implementado nas sessões deste clube, onde estão alguns alunos do 5.º ano desta escola. Propôs-se este tema, pois é uma forma de relacionar a matemática com a sua história, onde se destaca a ação da escola pitagórica, dado que foram os pitagóricos que descobriram estes números. Como materiais manipuláveis, recorreu-se à caricas de garrafas, para poderem construir figuras triangulares, quadrangulares, pentagonais e hexagonais.

O segundo tema teve como título "Sequência de Fibonacci" e é composto por três tarefas. Na primeira tarefa "Herbário de Fibonacci", onde a estagiária levou flores em que o número de pétalas são números da sequência de Fibonacci e referiu como forma de motivação que estávamos na Primavera, a estação das flores e então ir-se-ia olhar para elas com um olhar matemático. Nesta sessão os alunos souberam o nome delas, contaram as suas pétalas, exploraram a sequência de Fibonacci, conheceram um pouco a vida deste matemático, identificaram o grupo taxonómico de cada uma das flores e construíram um herbário no final. Esta sessão foi na aula de Educação Tecnológica, por causa dos motivos anteriormente referidos. A segunda tarefa teve como nome "Vamos construir a espiral de Fibonacci!", em que se relembrou os números da sequência, facultou-se uma folha com instruções para a construção da espiral logarítmica e referiu-se que esta está presente em alguns animais tais como o Nautilus. Depois os alunos construíram em grupo a espiral de Fibonacci, e no fim, decoraram com imagens alusivas à diversidade dos animais e das plantas, onde se abordou cada um. Esta tarefa também foi numa aula de Educação Tecnológica. Por último, a terceira tarefa foi numa aula de Português, em que teve como título: "Herbário de Fibonacci em verso", onde se formou grupos e cada um tinha as flores de cada número de pétalas que abordamos e escreveram poemas dedicados a essas flores. Para isso, como forma de relembrar as suas características, o herbário anteriormente construído passou nas mesas dos grupos, como forma de servir-lhes de inspiração para a criação dos poemas.

A seguir, descrevem-se as tarefas e a forma como decorreram:

Números Figurados

Tema: Números figurados.

Tópico: Sequências e regularidades

Nível de ensino: 2.º ciclo, 5.º ano.

Número de sessões previstas: 4

Duração: 90 minutos cada.

Objetivos matemáticos principais:

- ✓ Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
- ✓ Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação.
- ✓ Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.
- ✓ Conhecer em termos históricos, a escola pitagórica.

Conteúdos:

- ✓ O que são números figurados (Números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais).
- ✓ Escola pitagórica (nota histórica).
- ✓ Números quadrados e potências de expoente 2.

Materiais e recursos: fichas de trabalho, quadro interativo e caricas de garrafas.

De acordo com a adequação epistemológica de Godino (2011), esta tem como indicadores as situações problemas; as linguagens; as regras, definições, procedimentos, e proposições; os argumentos e as relações.

Foi proposto com este tópico aos alunos um conjunto de situações contextualizadas, pois são quatro tarefas relacionadas com os números figurados, nomeadamente os números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais, onde tiveram de descobrir os primeiros números de cada sequência e como se formavam cada uma das mesmas. O objetivo consiste em identificarem os primeiros números que as constituem e as suas respetivas leis de generalização.

Ao nível de linguagem utilizada, estas tarefas permitiram aos alunos que partilhassem as suas ideias entre si (expressão verbal), mas também que fizessem registos, que podia ser através de respostas por extenso, esquemáticas, ou através de representações pictóricas.

No que concerne às regras, definições, procedimentos, e proposições, cada tarefa tinha um enunciado com um conjunto de perguntas sobre cada sequência. Estas tarefas foram realizadas com recurso a caricas, de forma a concretizar as várias situações colocadas. No caso dos números triangulares: formar números triangulares com as caricas, descobrir como se formam estes números e decompor números usando até três números triangulares no máximo. No caso dos números quadrados, os procedimentos são semelhantes, pois os alunos tinham de formar números quadrados com as caricas, descobrir como se formam estes números, explicar como é que a partir de dois números triangulares consecutivos se pode obter um número quadrado, subtrair os quadrados de dois números quadrados consecutivos e depois somar os números inicias, para ver o que acontece. No caso dos números pentagonais, também foi pedido para formar números pentagonais com as caricas, descobrir como se formam estes números e comparar com os triangulares para ver o que se passa de fabuloso. Por último, para os números hexagonais, o procedimento foi semelhante ao utilizado na abordagem dos números pentagonais, pois foi solicitado aos alunos que formem números hexagonais com as caricas, que descubram como se formam estes números e para que os relacionem com os triangulares para ver o que acontece.

No que diz respeito aos argumentos, estas tarefas continham enunciados em que se solicitava a argumentação dos alunos, nomeadamente para que explicassem como formavam os números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais, como relacionavam os números pentagonais com os triangulares e os hexagonais com os triangulares, bem como é que explicavam a formação de um número quadrado através de dois triangulares, onde os alunos tinham de explicar, podendo ser através de respostas completas ou com recurso a esquemas.

Por último, as relações envolviam conteúdos que se interligam entre si, nomeadamente a ligação dos números quadrados, dos pentagonais e hexagonais com os triangulares e a forma como se descobrem (em que pode ser com o uso de um esquema que permita ver o que acontece de um número para outro, …).

Tarefa: Números triangulares (consultar apêndice III):

- ✓ Para começar a tarefa, facultou-se caricas de garrafas aos vários grupos. Pediu-se para construírem com as caricas, várias triângulos equiláteros. Depois de algum tempo, facultou-se uma ficha de trabalho, para eles registarem os números que obtiveram e realizou-se esse registo no quadro. Estas fichas iriam servir de análise das respostas dadas pelos alunos para este relatório final de estágio.
- ✓ Após o registo, referiu-se que estes números são números triangulares e fazem parte dos números figurados, que foram analisados pela primeira vez pela escola pitagórica, cujo fundador foi Pitágoras e abordou-se de uma forma breve a escola pitagórica e alguns aspetos da vida de Pitágoras. Referiu-se que existem vários números figurados, sendo um dos grupos os números que construímos, os triangulares. Perguntou-se o que são.
- ✓ A partir daqui, os alunos realizaram individualmente a ficha de trabalho, em que lhes foi pedido para descobrirem quantos pontos terão a 4.ª e a 5.ª figura; explicaram como as descobriram e como obtinham cada número triangular a partir do número anterior (através da adição do número natural seguinte à posição que queremos, ou seja, para o número (termo) que ocupa a 1.ª posição (ordem), começa sempre pelo 1, depois o 2.º termo da 2.ª ordem temos que buscar o 1.º termo (1) e adicionamos o número natural seguinte, que é o 2, logo 1 + 2 = 3, ou seja:

Figura (termo)	Número triangular	Resolução
1	1	1
2	3	1 + 2
3	6	1 + 2 + 3
4	10	1 + 2 + 3 + 4
5	15	1 + 2 + 3 + 4 + 5

- ✓ Destacou-se uma particularidade destes números. Para isso, exemplificou-se com o número 22, em que será pedido para decomporem no máximo em três números triangulares. A resposta é: 15 + 6 + 1. Pediu-se para decomporem outros números e pretendeu-se que chegassem à conclusão que qualquer número pode ser decomposto até três números triangulares.

Tarefa: Números quadrados (consultar apêndice III):

- ✓ Pediu-se para formarem quadrados usando as caricas e para que registassem os números que obtinham. Depois perguntou-se o que são números quadrados. A seguir, solicitou-se os alunos para explicarem como descobriram a 4.ª e 5.ª figura e como obtinham cada número quadrado a partir do número anterior (adicionando o número ímpar seguinte ao termo obtido anteriormente, ou seja, cada número quadrado pode ser considerado como a soma de números ímpares consecutivos. Esquematicamente:

Figura (termo)	Número quadrado	Resolução
1	1	1
2	4	1 + 3
3	9	1 + 3 + 5
4	16	1 + 3 + 5 + 7
5	25	1 + 3 + 5 + 7 + 9

- ✓ Pediu-se para tentarem relacionar os números quadrados com os triangulares. Pretendeu-se verificar quais as suas dificuldades e se demorassem muito tempo, dar-se-ia alguma ajuda. A conclusão é que somando dois triangulares consecutivos, obtém-se um número quadrado, ou seja, 1 + 3 = 4; 3 + 6 = 9, 6 + 10 = 16, …
- ✓ Remeteu-se para uma curiosidade, pediu-se para que calculassem o quadrado de 6 (36) e o de 5 (25), subtraíssem (que é 11) e para que dessem exemplos de dois números quadrados consecutivos e calculassem as suas diferenças. A conclusão que se pretendeu a que chegassem é que as diferenças são sempre números ímpares devido à sucessão dos números quadrados ser ímpar, par, ímpar, par e que essas diferenças são a soma dos números iniciais, ou seja, 36 – 25 = 11 = 6 + 5. Outro exemplo: $10^2 - 9^2 = 100 - 81 = 19$. Se se adicionar os números iniciais, obtemos 10 + 9 = 19.
- ✓ Por último, pediu-se para que tentassem descobrir outra forma de descobrir estes números (elevando o número que queremos ao quadrado). Aqui destacou-se que estavam a trabalhar com potências de expoente 2.

Tarefa: Números pentagonais (consultar apêndice III):

- ✓ Pediu-se aos alunos para que construissem números pentagonais com recurso às caricas e depois para que registassem os números que iam obtendo. Após o registo, perguntou-se o que são números pentagonais.
- ✓ Solicitou-se para explicarem como descobriam a 4.ª e 5.ª figura e como obtinham cada número pentagonal a partir do número anterior (Uma forma é se quisermos o termo da ordem 2, somamos 2 ao triplo do número triangular anterior, ou seja: 2 + 1 x 3 = 5). Porém, duvida-se que alguém refira esta forma, por ser um pouco complexa. A outra é começar pelo número 1 e adicionar de 3 em 3, de forma consecutiva, ou seja, se se reparar na diferença entre os seus números (1, 5, 12, …), é 5 – 1 = 4; 12 – 5 = 7 e a diferença entre 7 e 4 é 3. Esquematicamente:

Figura (termo)	Número pentagonal	Resolução
1	1	1
2	5	1 + 4
3	12	1 + 4 + 7
4	22	1 + 4 + 7 + 10
5	35	1 + 4 + 7 + 10 + 13

Outra forma é para cada figura, colocar o seu número como número de pontos em cada lado e ver qual o número que resulta, ou seja:

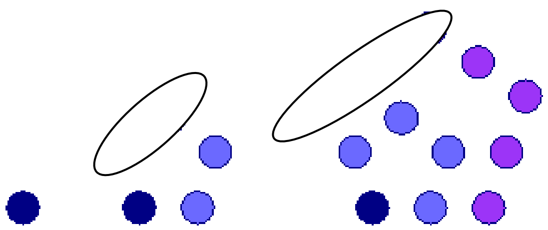


Figura 46 – Representação pictórica de uma forma possível de descobrirem os números pentagonais.

- ✓ Solicitou-se para a observação dos números triangulares e números pentagonais, para que comparassem e que dizessem conclusões. Pretendeu-se que referissem que cada número pentagonal é um terço de um número triangular, pois os triangulares são o 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, … e os pentagonais são o 1, 5, 12, 22, 35, …Por exemplo, o 5 é um terço de 15; 12 é um terço de 36, entre outros.

Tarefa: Números hexagonais (consultar apêndice III):

- ✓ Pediu-se aos alunos para que construissem números hexagonais com recurso às caricas e depois para que registassem. Após o registo, perguntou-se o que são números hexagonais.
- ✓ Solicitou-se para que explicassem como se obtinham cada número hexagonal. Pretendeu-se que procurassem regularidades nessa sequência e que descobrissem que se reparar nas suas diferenças, obtemos os números 1, 5, 9, 13, … pode-se ver que de um número para outro têm uma diferença de 4 números. Para calcular o 4.º número hexagonal, somamos 1 + 5 + 9 + 13 = 28. Para calcular o 5.º número hexagonal, somamos 4 ao 13 (=17) e adicionamos 1 + 5 + 9 + 13 + 17 = 45). Esquematicamente:

Figura (termo)	Número hexagonal	Resolução
1	1	1
2	6	1 + 5
3	15	1 + 5 + 9
4	28	1 + 5 + 9 + 13
5	45	1 + 5 + 9 + 13 + 17

Outra forma é para cada figura, colocar o seu número como número de pontos em cada lado e ver qual o número que resulta, ou seja:

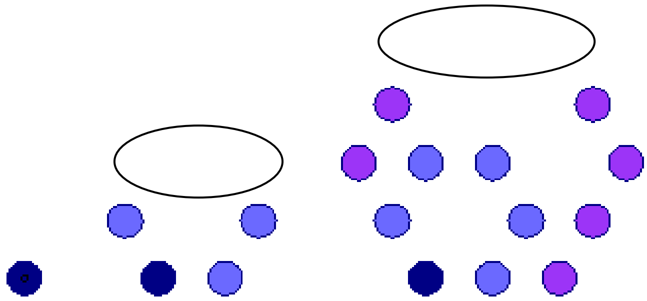


Figura 47 – Representação pictórica de uma forma possível de descobrirem os números hexagonais.

- ✓ Pediu-se para relacionarem os números hexagonais com os triangulares. Pretendeu-se que os alunos chegassem à conclusão que cada número hexagonal é um triangular, pois os triangulares são o 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, … e os hexagonais são o 1, 6, 15, 28, 45, …

Sequência de Fibonacci

Tema: Sequência de Fibonacci.

Tópico: Sequências e regularidades

Nível de ensino: 2.º ciclo, 5.º ano.

Número de sessões previstas: 3

Objetivos principais:

— Matemática:

- ✓ Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
- ✓ Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação.
- ✓ Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.
- ✓ Compreender a sequência de Fibonacci.

— Ciências Naturais

- ✓ Identificar as partes de uma flor.
- ✓ Identificar a presença da sequência de Fibonacci na Natureza.
- ✓ Construir um herbário.

— Educação Tecnológica:

- ✓ Utilizar corretamente materiais básicos do desenho técnico (régua, esquadro, compasso).

— Português:

- ✓ Desenvolver o raciocínio metafórico.
- ✓ Planificar a escrita de textos (registar ideias relacionadas com o tema, hierarquizá-las e articulá-las devidamente).

Conteúdos:

— Matemática:

- ✓ A sequência de Fibonacci.
- ✓ Presença da sequência de Fibonacci na natureza (também associado às ciências naturais).

- ✓ Fibonacci
- ✓ Espiral de Fibonacci.

— Ciências Naturais:

- ✓ O Herbário.
- ✓ Grupos taxonómicos de flores.
- ✓ Diversidade de seres vivos.

— Educação Tecnológica:

- ✓ Segmentos de reta paralelos e perpendiculares e circunferências.

— Português:

- ✓ Poesia: Construção de poemas, rimas e estruturas de poemas.

Materiais e recursos: ficha de trabalho, quadro interativo, flores, cartolinas, cartões com os grupos taxonómicos das flores, fita-cola, canetas, folhas quadriculadas, compasso, régua, esquadro, cola, carvão, imagens para colar, folhas brancas e lápis de cor.

De acordo com a adequação epistemológica de Godino (2011), esta tem como indicadores as situações problemas; as linguagens; as regras, definições, procedimentos, e proposições; os argumentos e as relações.

Em termos de situação problema, foi proposto com este tópico aos alunos um conjunto de situações contextualizadas, pois são três tarefas relacionadas com a sequência de Fibonacci, nomeadamente a construção do Herbário com as flores abordadas (em que o número de pétalas faz parte desta sequência), a construção da espiral (que para tal, precisam de construir os quadrados adjacentes uns aos outros e estes têm como medidas de lado os números desta sequência) e a escrita de poemas sobre as flores abordadas na mesma, onde tinham de descobrir os primeiros números desta sequência, como se forma e a partir das características das flores e da sequência, criarem poemas.

Ao nível da linguagem utilizada, estas tarefas permitiam que os alunos interpretassem o enunciado, ou seja, as situações que lhes foram pedidas (que neste caso, o único enunciado foi facultado para a ajuda da construção da espiral). Estas tarefas permitiam aos alunos que partilhassem as suas ideias entre si (expressão verbal), mas também que fizessem registos, que podia ser através de respostas por extenso, esquemáticas, ou através de representações pictóricas.

No que concerne às regras, definições, procedimentos, e proposições, a tarefa “Vamos construir a espiral de Fibonacci!” tinha um enunciado com um conjunto de instruções sobre como construir esta espiral. Estas tarefas foram realizadas através de trabalhos de grupo, como forma de promover a comunicação entre os grupos, em que contém situações onde os alunos tinham de escrever o que concluíam sobre como se formava a sequência (primeira tarefa – O herbário de Fibonacci), contudo, os registos seriam mais a nível de trabalhos práticos, em que terão momentos de interpretação das instruções, respostas imediatas (para que escrevessem os primeiros números desta sequência) e experimentação de procedimentos (na primeira tarefa tinham de descobrir como se formava esta sequência, identificar os grupos taxonómicos de cada flor, na segunda tarefa, tinham de construir a espiral de Fibonacci, que para isso, precisam de saber quais as medidas de lado dos quadrados (que são os números da sequência), saber traçar circunferências, e por fim, na terceira tarefa, tinham de escrever poemas sobre as flores abordadas, para a construção de “O herbário de Fibonacci em verso”).

No que diz respeito aos argumentos, como já foi referido, uma das tarefas continha um enunciado em que se solicitava a interpretação das instruções, contudo, antes eles precisavam de descobrir como se formava a sequência e é aqui que também entra a argumentação dos alunos, nomeadamente para que explicassem como pensaram para a descoberta destes números, que podia ser através de respostas completas ou com recurso à esquemas.

Por último, as relações envolvem conteúdos que se interligam entre si, nomeadamente a presença constante da sequência de Fibonacci nas três tarefas, pois na primeira tinham como objetivo a construção do herbário com as flores que contêm pétalas que obedecem aos números que constituíam a sequência, a segunda era construir a espiral em que para isso era necessário saber a medida dos lados dos quadrados que a ajudam a construir (estes números são os que fazem parte da sequência) e para a escrita de poemas, apesar de não estar explícito a presença destes números nos poemas, os alunos podiam tê-los incluído na elaboração dos mesmos.

Tarefa: Herbário de Fibonacci

Duração da sessão: 90 minutos.

Material: flores, cartolinas A4 de várias cores e os cartões com os grupos taxonómicos.

Conteúdos programáticos: Conceito de sequência, sequência de Fibonacci, conceito de herbário e a sua importância, classificação dos seres vivos (plantas) e as partes de uma flor.

Objetivos:

— Ciências Naturais:

- ✓ Conhecer algumas flores que estão presentes no nosso meio;
- ✓ Identificar as partes de uma flor;
- ✓ Indicar diferentes grupos taxonómicos;
- ✓ Identificar a presença da sequência de Fibonacci na Natureza;
- ✓ Construir um herbário;

— Matemática:

- ✓ Compreender a sequência de Fibonacci;
- ✓ Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo;
- ✓ Analisar as relações entre os termos de uma.

De forma a fazer a transversalidade com as ciências naturais e com base nos programas, para além de se trabalhar a sequência de Fibonacci, esta tarefa envolveu os conteúdos programáticos "classificação dos seres vivos" (neste caso, de algumas flores), em que se indicaram as principais categorias taxonómicas e "morfologia das plantas com flor" (nomeadamente, legendar as partes de uma flor).

No início desta tarefa, perguntou-se dado que se estava na estação da primavera, se já tinham observado a quantidade de flores que existia nos jardins e nas ruas. Questionou-se que flores conheciam e pediu-se que olhassem para elas com um olhar especial.

Esta tarefa começou pela formação de 7 grupos, em que se distribuiu flores a cada um da seguinte forma:

O grupo 1 trabalhava com as flores que têm 1 pétala (antúrio e jarro);

O grupo 2 trabalhava com as flores que têm 2 pétalas (flor do mirtilo e estrelícia);

O grupo 3 trabalhava com as flores que têm 3 pétalas (lírio);

O grupo 4 trabalhava com as flores que têm 5 pétalas (orquídea, alecrim do norte, ciclame e botão de ouro);

O grupo 5 trabalhava com as flores que têm 8 pétalas (rosa quando esta fechada);

O grupo 6 trabalhava com as flores que têm 13 pétalas (malmequer);
O grupo 7 trabalhava com as flores que têm 21 pétalas (arctotis e girassol).

Após a formação de grupos e distribuição das flores, começou-se por perguntar se conheciam as flores que tinham presentes nas mesas.

No grupo um distribuiu-se um antúrio e um jarro. Pediu-se o nome de cada flor, o número de pétalas e algumas caraterísticas. A professora escreveu o nome da flor e o número de pétalas no quadro. Depois distribuíram-se pequenos cartões alusivos às classificações de cada flor. Seguiu-se este procedimento para as outras flores, com os outros grupos.

A seguir, pediu-se aos alunos para que focassem a sua atenção nos números das pétalas observados. Referiu-se que estes números formavam uma sequência muito conhecida. Explicou-se o que era uma sequência (conjunto de objetos que estão organizados segundo uma ordem, regra, em que se verifica uma regularidade). Depois desta explicação, perguntou-se qual seria o número seguinte e como se descobria (o número seguinte seria 34, pois este forma-se através da adição dos dois números anteriores) e solicitou-se a continuação da sequência até ao 10.º número (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …). O registo no quadro foi:

1

1

1+ 1 = 2

2 + 1 = 3

3 + 2 = 5

5 + 3 = 8

8 + 5 = 13

13 + 8 = 21

21 + 13 = 34

34 + 21 = 55, …

Após a abordagem desta sequência, referiu-se o seu nome e questionou-se se conheciam este matemático. Falou-se um pouco sobre ele, que foi um matemático italiano, foi o responsável pela introdução da numeração árabe na Europa e criou um problema relativo a reprodução dos coelhos, cuja resolução é a sequência de Fibonacci e que esta sequência está presente na natureza, nomeadamente na reprodução dos coelhos, no número de ramos das árvores, flores, …

No fim, referiu-se que iriam construir um herbário. Questionou-se se sabiam o que é (coleção de plantas secas guardadas), o que deve conter (lugar e data de recolha, nome e descrição da planta) e para que serve (estudar as plantas quando não é possível observá-las na natureza devido à estação em que se está). Para isso, colaram cada flor numa cartolina de formato A4 e cada grupo escreveu o nome da flor, número de pétalas e a sua classificação consoante reino, filo, classe, ordem, família, género e espécie. Para esta classificação, facultou-se em folhas A6, pediu-se a um aluno para ler o reino, filo, classe, ordem, família género e espécie e depois perguntou-se se conseguiam descobrir de que flor se tratava. Também esteve presente em cada cartolina algumas informações sobre essa flor, bem como a legenda de algumas partes dessa flor, tais como pétalas, sépalas, receptáculo e pedúnculo. O objetivo final foi a construção de um herbário para colocar na biblioteca. Tinha como título: “O herbário de Fibonacci”.

O esquema que se pretendeu no herbário foi colocar a flor de um lado e a informação do outro (consultar apêndice IV e apêndice V, parte b).

Tarefa: Vamos construir a espiral de Fibonacci! (consultar apêndice III):

Aula de Educação Tecnológica.
Material: folhas quadriculadas, papel vegetal, régua, lápis, compasso, lápis de cor, quadro interativo e imagens de alguns seres vivos.
Objetivos (de acordo com o programa de Educação Tecnológica e Educação Visual):
- Discriminar a conveniência de medições rigorosas na execução de trabalhos.
- Utilizar corretamente materiais básicos do desenho técnico (régua, esquadro, compasso).
- Fazer colagens com diferentes materiais.

Conteúdos: sequência de Fibonacci, espiral de Fibonacci, diversidade de animais e plantas.
Duração: um bloco de 90 minutos e um de 45.

Como forma de fazer transversalidade com outras áreas, nomeadamente, Educação Tecnológica, propôs-se aos alunos a tarefa “Vamos construir a espiral de Fibonacci!”.

Para introduzir a tarefa, fez-se menção às flores que foram abordadas na sessão anterior, em que os números das pétalas são números da sequência de Fibonacci. Pediu-se para que lembrassem os primeiros números desta sequência e escreveu-se no quadro, para que dissessem como se obtinham. Chamou-se a atenção para o facto de que se construirmos quadrados adjacentes com as dimensões dos números desta sequência, pode-se formar uma espiral. Esta espiral é designada de Espiral Logarítmica. Para isso, forneceu-se uma folha com indicações de como construir esta espiral e uma folha quadriculada para a construírem.

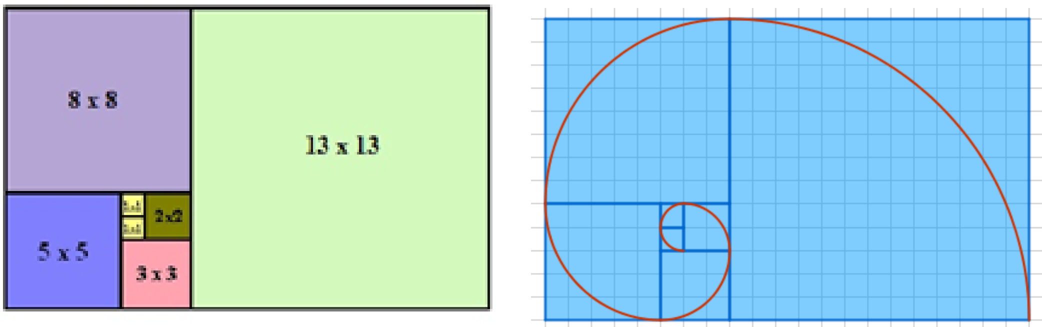


Figura 48 – Processos de construção da Espiral Logarítmica.

Após estas explicações, referiu-se onde podemos encontrar a sequência de Fibonacci na natureza, como por exemplo, alguns animais (camaleão, nautilus), nas artes, na arquitetura, na música, entre outros.

Perguntou-se se conheciam este ser vivo e falou-se um pouco sobre ele (os nautilóides são seres marinhos arcaicos que foram muito abundantes há muitos anos atrás. Nos nossos dias, existe ainda um género vivo — o náutilo — que vive no sudoeste do Oceano Pacífico. Têm uma cabeça que contém uns olhos bem desenvolvidos).

Na sessão seguinte, propôs-se a construção da espiral numa cartolina A2 branca. Depois de construída, passou-se com carvão por cima da espiral. Cada espiral tinha um exemplo de um animal ou planta. Esta figura foi ampliada várias vezes ao longo da espiral. Estas imagens consistiam na diversidade de animais e plantas em que em cada grupo falou-se um pouco sobre cada figura, como forma de estabelecer a transversalidade com as ciências, nomeadamente, com o tópico: “Diversidade nos animais” e “Diversidade nas plantas”.

Tarefa: Herbário de Fibonacci em verso

Aula de Português

Duração: 45 minutos.

Material: canetas, cartolinas, folhas de rascunho, lápis e “O herbário de Fibonacci”.

Objetivos:

- Construção de textos poéticos;
- Escrever textos, por sua iniciativa, para expressar conhecimentos, experiências, sensibilidade e desenvolver a imaginação;
- Desenvolver o raciocínio metafórico;
- Desenvolver o conhecimento da ortografia (escrever sem erros ortográficos e aplicar regras de ortografia e acentuação);
- Planificar a escrita de textos (registar ideias relacionadas com o tema, hierarquizá-las e articulá-las devidamente);
- Identificar marcas formais do texto poético: estrofe (terceto, quadra, quintilha) e verso (rimado e livre).

Conteúdos: texto poético e suas características e rimas.

Como forma de fazer transversalidade com outras áreas, nomeadamente, Língua Portuguesa e também como um meio e necessidade de trabalhar mais a componente escrita, propôs-se uma tarefa que consistia na criação de poemas sobre as flores abordadas anteriormente (no herbário de Fibonacci). Um dos objetivos principais desta tarefa consiste em sensibilizar os alunos para a poesia, pois a sua vertente sonora e rítmica é bastante atraente. “A leitura de poesia alimenta o gosto pela sonoridade de língua (rima, ritmo, som, palavras – aliterações e onomatopeias), pelo poder da linguagem (sentido literal, sentido figurativo) e pelo uso da linguagem poética e simbólica” (Sim-Sim, 2007, p. 55). Na construção de poemas, o que se pretendia é que os alunos encontrassem o ritmo, fizessem jogos de palavras através da polissemia, aliteração, rimas e criassem o nonsense. Para José António Gomes (1993), citado por Ramos (2007), “o nonsense resulta muitas vezes da apreensão de um real insólito por parte do olhar poético do sujeito lírico. A frequência elevada do nonsense na literatura infantil é explicada pelo gosto infantil pelo absurdo e pela deturpação das regras e das leis do mundo empírico, funcionando, em simultâneo como a ausência de sentido” (Ramos, 2007, p. 94-95). A poesia promove uma relação positiva entre o aluno e a sua língua e transporta o aluno para o mundo do fantástico, proporcionando-lhe o agrado do non-sense, do cómico e dos jogos (através das rimas, sons, palavras e estruturas) que as palavras proporcionam. Pensando um pouco sobre a escrita de poemas, esta deve ser uma forma do aluno se projetar, de manifestar os seus sentimentos sobre algo que queira ou que lhe é solicitado.

Para introduzir esta tarefa, começou-se por mostrar o herbário construído anteriormente, em que se observou as flores trabalhadas.

Após este momento inicial, formou-se 7 grupos e cada um abordou as flores de um número de pétalas abordado e construíram um poema. O herbário passaria a circular nas mesas, para os alunos relembrarem as características das flores. O produto final serviu para a criação de uma antologia com os poemas relacionados com as flores “de Fibonacci”. Depois de construídos, cada grupo apresentou o seu poema aos restantes e no final, juntou-se estes poemas ao herbário, em que se atribuiu como título: “Herbário de Fibonacci em verso”.

Destaca-se que em todas as tarefas implementadas, foi extremamente importante e teve-se sempre em conta as opiniões das colegas estagiárias, bem como dos professores cooperantes e dos professores de Educação Tecnológica e do Clube de matemática, pois o tempo que estes disponibilizaram foi crucial à implementação das mesmas, bem como a experiência que estes possuem é muito maior e foi uma mais valia para o desempenho das tarefas, pois as suas sugestões e recomendações foram muito importantes.

Capítulo 4 – Análise dos dados

O processo de recolha de dados através da observação, registos dos alunos e do registo fotográfico, permitiu a aquisição de uma grande quantidade de informação acerca do modo como alunos de 5.º ano resolvem tarefas de exploração de sequências e regularidades. Foram aplicadas 7 tarefas distintas em dois ambientes: um em sala de aula, com uma turma do 5.º ano e o outro foi em ambiente de clube (de matemática) com vários alunos das três turmas do 5.º ano de um colégio.

Números figurados

As quatro tarefas propostas para abordar este tema foram todas concretizadas no clube de matemática, com alunos do 5.º ano. O ambiente do clube é um ambiente bastante informal, pois os alunos costumam estar relaxados, por vezes, em grandes grupos, à volta das mesas, numa sexta-feira, no último tempo (16:30 – 18:00 horas).

1.ª Tarefa: Números triangulares:

Esta tarefa foi realizada no dia 26 de Abril de 2013, no clube de matemática. Nesta sessão estiveram presentes 19 alunos, de várias turmas do 5.º ano (consultar apêndice III).

Inicialmente, formou-se quatro grupos, em que se distribuiu caricas e pediu-se para que formassem triângulos equiláteros com as mesmas. Os grupos formaram três tipos de triângulos equiláteros: triângulos que eram apenas formados pela parte exterior (ou seja, considerando só o contorno), com enchimento, e um triângulo equilátero grande preenchido, isto é, como retratam as seguintes situações:



Figura 49 – Formas como os alunos construírem os triângulos equiláteros: 1.º sem ser preenchido; 2.º com preenchimento e 3.º um triângulo equilátero grande preenchido.

Foi-lhes sugerido que se focassem nos triângulos com enchimento e que registassem os números que foram obtendo. Para a questão “Quantos pontos terá a 4.ª figura? E a 5.ª?”, através da observação e pelos registos que têm, não tiveram dificuldades em chegar até ao 5.º termo. Todos responderam acertadamente que a 4.ª figura teria 10 caricas e a 5.ª teria 15.

Dos 19 alunos, houve 13 alunos que chegaram a escrever que a 6.ª figura ia ter 21 caricas e a 7.ª ia ter 28; 8 alunos escreveram até ao 8.º termo da sequência, que era 36 caricas e 4 alunos fizeram uma tabela, em que apresentaram até o 9.º termo (que era 45 caricas).

Para a questão “Como podes obter cada número triangular usando o número anterior?” 6 alunos utilizaram um esquema (representação pictórica), em que verificavam a mudança que estava relacionada com o número da base, ou seja, recorreram à representação pictórica e 3 alunos escreveram uma pequena explicação por extenso, em que uma das possibilidades é ver a sucessão dos números naturais como bases dos triângulos:

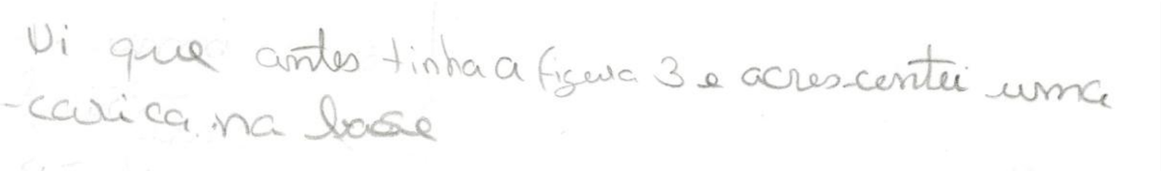

Vi que antes tinha a figura 3 e acrescentei uma carica na base

Figura 50 – Explicação de um aluno por extenso.

Este aluno escreveu “carica na base”, que se refere ao número anterior, por exemplo, para a 6.ª figura, tem 6 caricas na base, porque é uma carica mais o número da base anterior, que é o 5, ou seja, o aluno esqueceu-se de referir a base da figura anterior, que é necessária para somar mais 1. Este tipo de resposta revela que os alunos percebem o que está a acontecer, contudo, não conseguem muito bem explicar por palavras e por isso, recorrem frequentemente à representação pictórica.

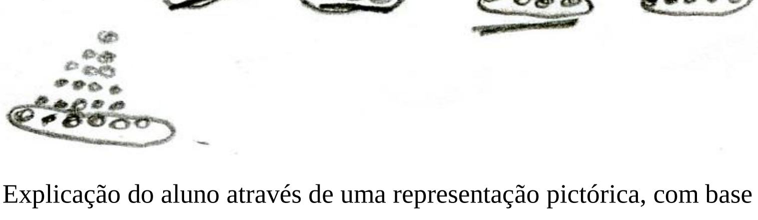


Figura 51 – Explicação do aluno através de uma representação pictórica, com base nas bases dos triângulos.

Contudo, nenhum aluno identificou a diferença entre dois números triangulares consecutivos, ou seja:

Figura (termo)	Número triangular	Resolução
1	1	**1**
2	3	1 + **2**
3	6	1 + 2 + **3**
4	10	1 + 2 + 3 + **4**
5	15	1 + 2 + 3 + 4 + **5**

Desses 6 alunos que utilizaram uma representação pictórica, um aluno tentou generalizar através de uma expressão:

Figura 52 – Tentativa de generalizar através de uma expressão.

Relativamente à questão: "Considera o número 22. Decompõe o número 22 usando no máximo três números triangulares. Escreve-os.", nove alunos deram-lhe resposta, o que se considera bom, apesar de terem demorado muito tempo a responderem, pois não estavam a compreender, contudo, conseguiram. Alguns exemplos foram: 21 + 1 = 22 e 15 + 6 + 1 = 22. Para a questão: "Faz o mesmo com outros números. O que podes concluir?", oito alunos deram alguns exemplos com outros números e foram: 28 + 10 = 38; 21 + 6 + 3 = 30; 21 + 6 = 27. Mas nenhum escreveu a conclusão de que a maior parte dos números pode ser decomposto até três números triangulares. Verifica-se que eles até sabem dar alguns exemplos, mas não conseguem explicar por escrito, o que revela uma dificuldade em comunicar as ideias matemáticas.

Em síntese, esta tarefa permitiu que os alunos conhecessem os primeiros números triangulares e o material utilizado (as caricas) foram essenciais para apoiar a descoberta destes números, pois todos fizeram os triângulos com recurso às mesmas, ou seja, usando material concreto. Só no final da sessão é que se procedeu à exploração da relação que existia entre os números. Segundo Godino (2011), é necessário ter em conta as componentes de adequação didática, mas focando-nos na mediacional (que está relacionada com o tempo adequado para as abordagens dos conteúdos), destaca-se que o tempo é sempre um factor limite, embora nesta sessão, tenha sido suficiente.

2.ª Tarefa: Números quadrados:

Esta tarefa foi realizada após a tarefa dos números triangulares, ou seja, também decorreu no dia 26 de abril (consultar apêndice III). A professora estagiária seguiu o mesmo processo de exploração utilizado na abordagem dos números triangulares, isto é, através das caricas, formavam quadrados, mas como nos triângulos formados, escreveram apenas o números de caricas dos triângulos "com enchimento", para os quadrados já formaram também quadrados "com enchimento". Como esta tarefa foi realizada na segunda metade do bloco (17:15 – 18:00h), alguns alunos foram embora porque tinham autocarro, o que fez com que ficassem 12 alunos para a abordagem da mesma.

À semelhança da primeira tarefa, tínhamos a questão "Quantos pontos terá a 4.ª figura? E a 5.ª?", em que todos os alunos responderam acertadamente que a 4.ª figura teria 16 caricas e a 5.ª figura 25. Oito alunos escreveram até ao 6.º termo da sequência (36) e quatro alunos escreveram até ao 7.º termo (49).

Figura 53 – Construção de números quadrados.

Depois, à semelhança da tarefa anterior, o enunciado tinha a questão: "Como podes obter cada número quadrangular a partir do número anterior?", em que as respostas foram variadas. De 12 alunos, dois não fizeram a questão e outros dois responderam de forma errada. Dos 8 restantes, um respondeu "somando 2 para obter o próximo número" e três alunos responderam: "É de 2 em 2 nos números ímpares", ou seja, estava a referir-se à diferença que vai entre a adição dos números ímpares consecutivos, ou seja, 1 + 3 + 5 + 7 + …, em que 3 – 1 = 2; 5 – 3 = 2,... Mais uma vez, revela que estes têm dificuldades em fazer comunicações matemáticas completas, contudo, são capazes de encontrar regularidades. Pode-se observar o registo que fez:

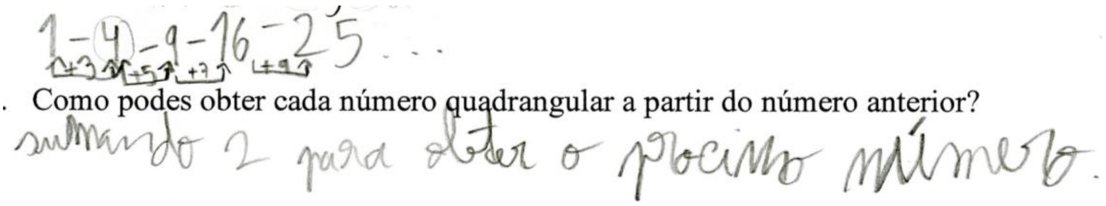


Figura 54 – Justificação da diferença ser de 2 em 2 números.

Quatro alunos responderam “colocando mais em cima e de um lado” (isto porque fizeram em grupo), tendo um destes alunos feito um esquema, neste caso, uma representação pictórica, que justifica a sua resposta (observar a figura seguinte):

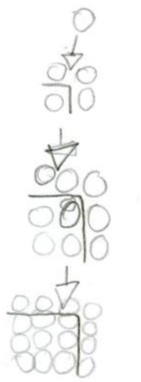
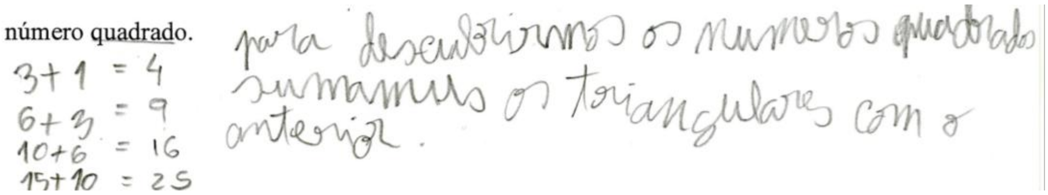


Figura 55 – Justificação através de uma representação esquemática sobre a formação de um número quadrado.

Relativamente à questão “Explica como a partir de dois números triangulares consecutivos podes obter um número quadrado”, dos doze alunos, só cinco é que responderam e destes, só um é que justificou os seus exemplos. Este aluno apesar de ter respondido, não explicou muito bem, pois afirmou “somamos os triangulares com o anterior”, quando o que queria dizer era “através da soma de dois números triangulares consecutivos”. Os outros limitaram-se a dar exemplos e foram eles: 15 + 21 = 36; 28 + 26 = 64 e os seguintes:

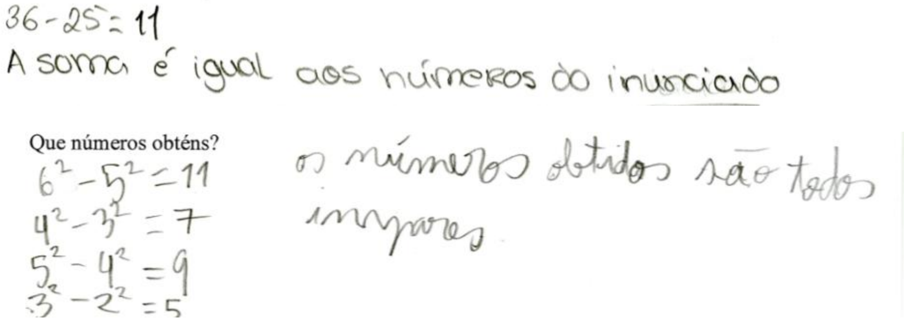

número quadrado.

$3+1 = 4$
$6+3 = 9$
$10+6 = 16$
$15+10 = 25$

para descobrirmos os numeros quadrados sumamos os triangulares com o anterior.

Figura 56 – Tentativa de dar uma resposta completa à questão sobre como formar um número quadrado tendo dois números triangulares.

Depois propunha-se outra questão: “Subtrai o quadrado de 6 pelo quadrado de 5. Experimenta com outros números consecutivos. O que podes concluir? Experimenta somar os algarismos iniciais. Que números obténs?”, oito alunos responderam à questão, o que indica que mais da metade respondeu. Destes oito, surgiram dois tipos de respostas, quatro falaram da particularidade de serem números ímpares e destes quatro, só um aluno é que escreveu com outros exemplos; os outros quatro escreveram a igualdade dos números iniciais, pois escreveram: “A soma é igual aos números do enunciado”.


$36-25=11$
A soma é igual aos números do inunciado

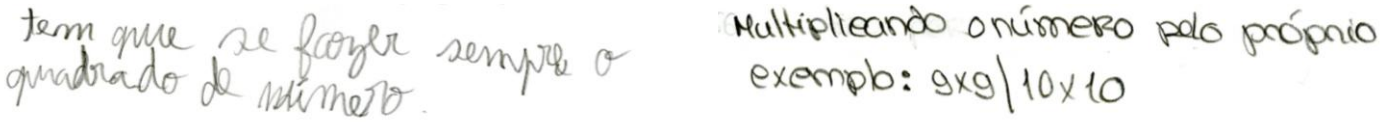
Que números obténs?

$6^2-5^2=11$
$4^2-3^2=7$
$5^2-4^2=9$
$3^2-2^2=5$

os números obtidos são todos impares

Figura 57 – Justificação de que a soma dos números iniciais é igual à diferença entre os seus quadrados.

Em relação à última questão “O que fazes para descobrir o número de pontos (caricas) de qualquer figura? Escreve uma regra”, em que se pedia aos alunos para escreverem uma regra para descobrir o número de caricas (pontos) de qualquer figura, dos doze alunos, só oito é que escreveram. Contudo, só cinco alunos responderam acertadamente. Mas nenhum escreveu usando uma fórmula, por exemplo: n^2, ou l^2 (lado x lado), o que revela que eles ainda não estão num nível algébrico mais avançado. Das duas respostas que se seguem, a primeira foi dada apenas por um aluno, enquanto que a segunda foi dada por 4 alunos. Esperava-se que das 4 sequências de números figurados propostas, os alunos chegassem à expressão algébrica desta, por ser mais fácil e também por corresponder à área de um quadrado.


tem que se fazer sempre o quadrado de número.

Multiplicando o número pelo próprio
exemplo: 9x9 | 10x10

Figura 58 – Duas respostas dadas pelos alunos relativas à lei de formação dos números quadrados.

No fim, a ficha incluía uma questão relativa ao que sentiram nesta sessão. Só oito alunos é que responderam, pois os outros tinham que ir embora por causa do autocarro. No geral, gostaram muito, pois disseram que "favorecia a sua inteligência a matemática", "sim, porque fez-me lembrar a matéria dada" e " sim, porque foi divertida". Só um aluno é que não gostou.


Gostaste desta sessão? Explica porquê.
sim, porque favoreco a minha inteligência à matemática.

Sim, porque foi divertida

Figura 59 – Opiniões dos alunos sobre as sessões "Números triangulares e números quadrados".

No final, falamos um pouco sobre estes números, o que são e que a primeira vez que foram abordados foi na escola pitagórica (falamos um pouco sobre ela e de Pitágoras). Esta tarefa permitiu que conhecessem os números quadrados, que pudessem relacioná-los com os números triangulares e que descobrissem que a diferença entre dois números quadrados consecutivos era sempre um número ímpar e igual à soma dos números iniciais.

<u>3.ª Tarefa: Números pentagonais:</u>

Esta sessão decorreu no dia 3 de maio de 2013 (consultar apêndice III). Nesta sessão apareceram 16 alunos. Inicialmente, fez-se uma breve correção dos números triangulares e quadrados, em que se incidiu na relação que havia entre os números que formavam as sequências (consultar os apêndices – foto 1). A professora estagiária seguiu o mesmo processo usado na abordagem nos números anteriores, ou seja, com o recurso a caricas, a professora pediu para que formassem pentágonos.

À semelhança dos enunciados anteriores, a professora estagiária apresentava três figuras e no enunciado aparece a questão "Quantos pontos terá a 4.ª figura? E a 5.ª?". Para isso, os alunos poderiam utilizar as caricas, mas como se fez a correção dos números triangulares e quadrados, em que a professora estagiária incentivava para verem sempre a relação entre os números, alguns alunos utilizaram as caricas, mas a maioria já descobriam a relação entre os números através de esquemas. De 16 alunos, 12 responderam acertadamente que a 4.ª figura iria ter 22 caricas e a 5.ª 35 caricas. Destes alunos, dois alunos utilizaram a representação pictórica, para além do recurso às caricas e 4 usaram o esquema de ver a relação entre os números, ou seja

:

Figura 60 – Respostas por representação pictórica e por esquema sobre os números pentagonais.

Destes 12 alunos que descobriram o número de caricas da 4.º e da 5.ª figura, 2 alunos calcularam até ao 10.º termo da sequência, ou seja, tinham escrito 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, … É de realçar que estes alunos são muito empenhados nas várias disciplinas.

Relativamente à questão “Explica uma forma de chegar a um número pentagonal de uma ordem qualquer”, dos 16 alunos, só 9 é que responderam à questão. Penso que se deve ao facto de se ter formado 4 grupos de 4 alunos, em que 2 destes grupos são muito bons. Houve três tipos de respostas: resposta por extenso, por esquema e resposta por extenso/esquema:

a) Resposta por extenso/esquema (utilizada por um aluno):

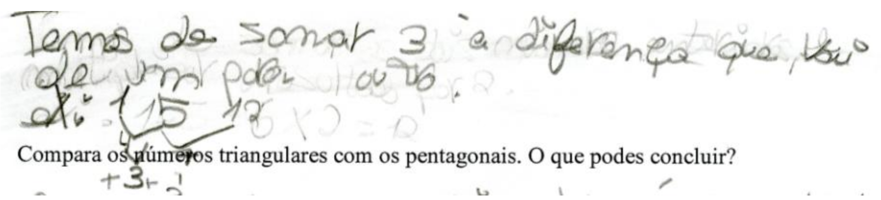


Figura 61 – Resposta por extenso/esquema sobre a formação de um número pentagonal.

b) Esquema: (utilizado por três alunos):

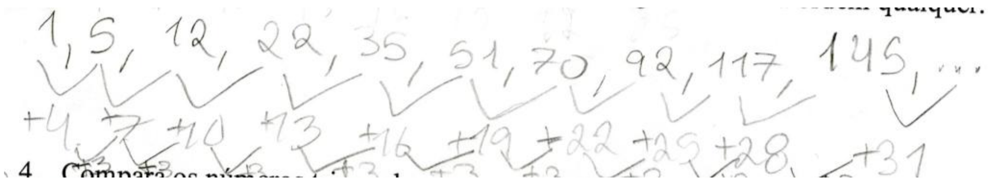


Figura 62 – Resposta por esquema sobre a formação de um número pentagonal.

c) Resposta por extenso (escrita por cinco alunos): "temos que acrescentar de 3 em 3" e "temos que somar 3 à diferença que vai de um para o outro".

Destaca-se que como a professora estagiária tinha previsto, nenhum aluno chegou à expressão algébrica, pois reconhece que esta era difícil.

No que concerne à última questão, "Compara os números triangulares com os pentagonais. O que podes concluir?", dos 16 alunos, só 2 é que responderam. Destaco que estes dois alunos eram os que estavam mais empenhados na tarefa, são muito bons e estavam juntos. Estes escreveram os primeiros números triangulares e os pentagonais e viram que não havia nenhum em comum, mas também tiveram uma pequena ajuda da professora estagiária, pois esta afirmou "não precisam de ser o mesmo número, um pode ser o dobro de outro ou terem outra relação". Estes experimentaram multiplicar por dois os números pentagonais e viram que não encontravam nenhuma regularidade. Um deles disse: "Vamos experimentar então com o triplo":

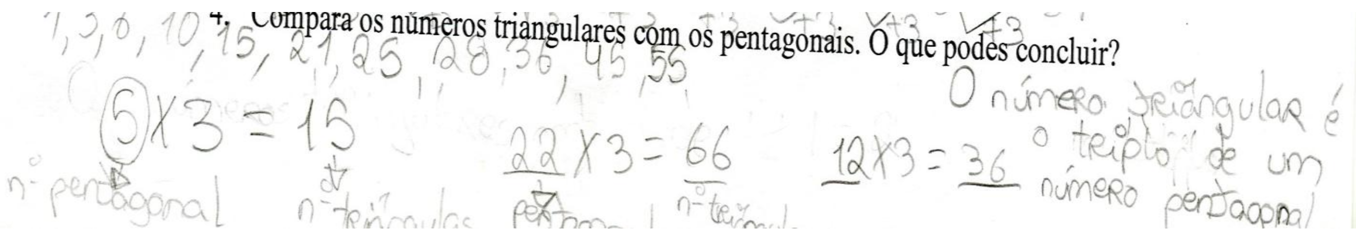


Figura 63 – Resposta à questão que pedia para relacionarem os números pentagonais com os triangulares.

Esta tarefa permitiu aos alunos que conhecessem os números pentagonais e que os relacionassem com os triangulares. De forma geral, o tempo facultado foi adequado à realização da tarefa.

4.ª Tarefa: Números hexagonais:

Esta sessão decorreu no dia 10 de maio de 2013 (consultar apêndice III). Nesta sessão participaram 14 alunos. Inicialmente, tal como na sessão anterior, fez-se uma breve correção dos números pentagonais e como nesta se tinha incidido na relação que havia entre os números que formavam as sequências, desta vez os alunos é que ditaram os números e disseram o que se passava de um número para o outro (consultar os apêndices –

foto 3). A professora estagiária seguiu o mesmo processo usado na abordagem nos números anteriores, ou seja, com o recurso a caricas e pediu para que formassem hexágonos.

Em relação à primeira questão “Quantos pontos terá a 4.ª figura? E a 5.ª?”, todos os alunos responderam. De 14 alunos, 3 responderam que a 4.ª figura teria 28 caricas e a 5.ª teria 44. Ora o 5.º número pentagonal é 45, o que revela que se enganaram nos cálculos, embora o raciocínio estivesse certo. Dos 14 alunos, 9 calcularam até ao 6.º número pentagonal (que é o 66).

No que concerne à questão formulada “Explica uma forma de chegar a um número hexagonal de uma ordem qualquer”, como era um pouco difícil formarem os hexágonos com as caricas, nesta sessão nenhum aluno as utilizou. Já para os números pentagonais, foram muito poucos os que usaram, pois estes polígonos são mais difíceis de formar do que os triângulos equiláteros e os quadrados. Portanto, a maior parte descobriu através do esquema, em que procuraram saber a relação que existe de um número para outro. Houve dois tipos de resposta: em esquema (8 alunos) e por extenso (6 alunos). Porém, a resposta por extenso é derivada do que fizeram esquematicamente com o colega ou num suporte que não a ficha dada:

a) Resposta por esquema:

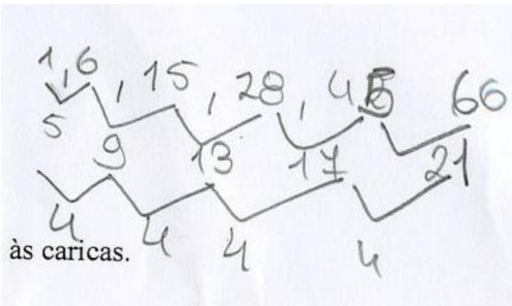


Figura 64 – Resposta por esquema relativa às diferenças entre os números hexagonais.

b) Resposta por extenso:

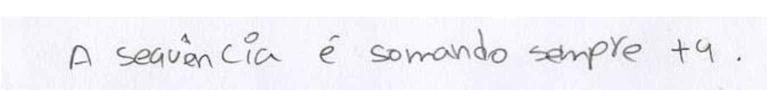


Figura 65 – Resposta por extenso sobre os números hexagonais.

Contudo, destes 6 alunos que responderam por extenso, em 2 alunos verifica-se que tal como detetado anteriormente, têm algumas dificuldades na comunicação matemática, pois também queriam dizer que era "acrescentar mais quatro", porém, a explicação ficou um pouco confusa:

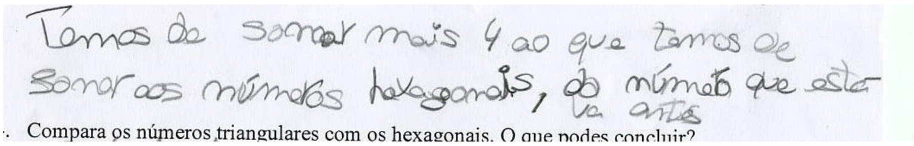


Figura 66 – Resposta de um aluno em que se verifica alguma confusão.

Relativamente à ultima questão da tarefa "Compara os números triangulares com os hexagonais. O que podes concluir?", dos 14 alunos, 1 não fez, 2 tiveram a resposta errada, pois afirmaram: "os números hexagonais são os números triangulares de dois em dois", o que tal não se verifica, pois: **1,** 3, **6,** 10, **15,** 21, **28, 45**, 55, 66, …; 3 alunos responderam corretamente, ou seja, como podemos observar:

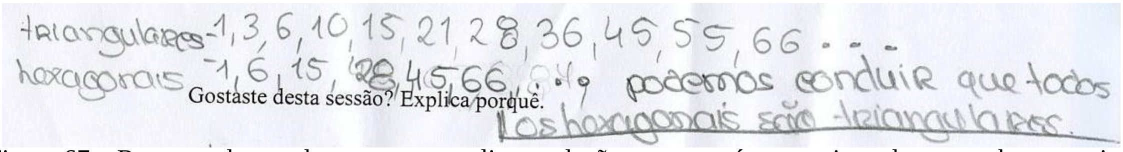


Figura 67 – Resposta de um aluno em que explica a relação entre os números triangulares e os hexagonais.

Cinco alunos responderam ao contrário, o que revela alguma distração, pois afirmaram que todos os números triangulares são hexagonais (ou seja, não são todos, são só alguns, ou então devia ser ao contrário, isto é: todos os números hexagonais são triangulares); e 3 alunos já responderam que "alguns números triangulares são iguais aos hexagonais", embora estes três alunos tivessem algum apoio das colegas estagiárias e da professora responsável pelo clube.

No fim desta sessão, era-lhes pedido para que manifestassem as suas opiniões sobre a mesma. Todos os alunos gostaram da sessão, talvez porque passaram a aplicar sempre a estratégia de fazer o esquema, em que descobriam as relações entre os números e manifestaram as mais diversas opiniões, desde: a utilidade que foi por causa de precisarem destes conteúdos para o 6.º ano e assim será mais fácil; porque aprenderam muitas coisas; porque foi em trabalho de grupo; porque gostam de fazer contas; porque conseguiram desenvolver mais o raciocínio e porque gostam de números. Esta tarefa permitiu-lhes conhecer os números hexagonais e relacioná-los com os triangulares.

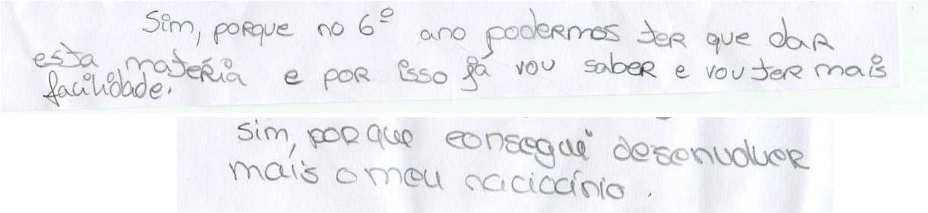


Figura 68 – Opiniões dos alunos sobre as sessões dos números pentagonais e hexagonais.

No fim de tudo, fizemos a correção, pois esta era a última sessão de números figurados no clube de matemática (consultar apêndice V, foto 4). Após uns dias, alguns alunos perguntaram se abordaria na próxima sexta-feira os números heptagonais e octogonais. Porém, como ainda tinha que se implementar as tarefas relacionadas com a sequência de Fibonacci, abordaram-se apenas até aos hexagonais.

Em termos de níveis de algebrização, a grande maioria conseguiu generalizar cada sequência, contudo, só conseguiram descobrir qualquer termo de qualquer ordem para as sequências de números quadrados e estes conseguem fazer generalizações, mas usam um raciocínio recursivo. A única sequência em que usaram um raciocínio distante foi para a sequência de números quadrados. Porém, não escreveram a expressão algébrica. Em termos de estratégias que os alunos usam na exploração de sequências, estes alunos usaram a estratégia do objeto inteiro apenas para a sequência dos números quadrados, pois estava relacionada com múltiplos. Nas restantes sequências, os alunos usaram a estratégia aditiva, que consiste numa abordagem recursiva, pois precisaram sempre de recorrer ao número anterior para descobrir o seguinte e de verificar as alterações que ocorriam de um termo para o seguinte e a estratégia da representação e contagem, dado que tiveram de contar o número de caricas que constituía cada figura, para realizar o registo dos mesmos.

Sequência de Fibonacci

Relativamente a esta atividade, foram realizadas 3 tarefas, todas concretizadas numa turma específica do 5.º ano. Ao contrário do ambiente do clube que é um ambiente bastante informal, estas tarefas foram realizadas em sala de aula, porém, foram trabalhadas em grupo. Estas realizaram-se às sextas-feiras, no 1.º bloco da manhã, nas aulas de Educação Tecnológica (9:00 - 10:30h).

1.ª Tarefa: O herbário de Fibonacci:

Esta tarefa foi realizada no dia 3 de maio de 2013. Nesta sessão, formou-se sete grupos e a cada um foi distribuído um grupo de flores. Estes grupos eram: flores de uma pétala (jarro e antúrio), flores de duas (flor de mírtilo e uma estrelícia que tinha duas pétalas), flores de três (lírio), flores de cinco (orquídea, alecrim do norte, ciclame e botão de ouro), flores de oito (rosa quando está fechada), flores de treze (margarita) e flores de vinte e um (arctotis e girassol).

Inicialmente pediu-se a cada grupo para que contasse o número de pétalas que cada flor tinha e para que identificassem as mesmas flores. Fez-se o registo no quadro. Depois, foi-lhes pedido para que registassem os números numa folha à parte. A professora estagiária disse que estes números faziam parte de uma sequência muito conhecida e pediu-lhes para que tentassem descobrir qual seria o próximo número, tendo em conta a relação que existe entre os anteriores. Os alunos fizeram os registos. Dos sete grupos, cinco descobriram rapidamente que para obtermos o número seguinte, tínhamos que somar os dois números anteriores. Os outros dois grupos não descobriram logo porque ambos pensaram desta forma: “o próximo número seria o 22, por causa do algarismo das unidades” (e não o 34). Contudo, os outros cinco grupos que descobriram rapidamente, apresentaram respostas semelhantes.

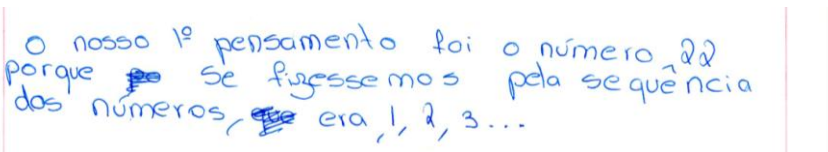


Figura 69 – Raciocínio que dois grupos utilizaram.

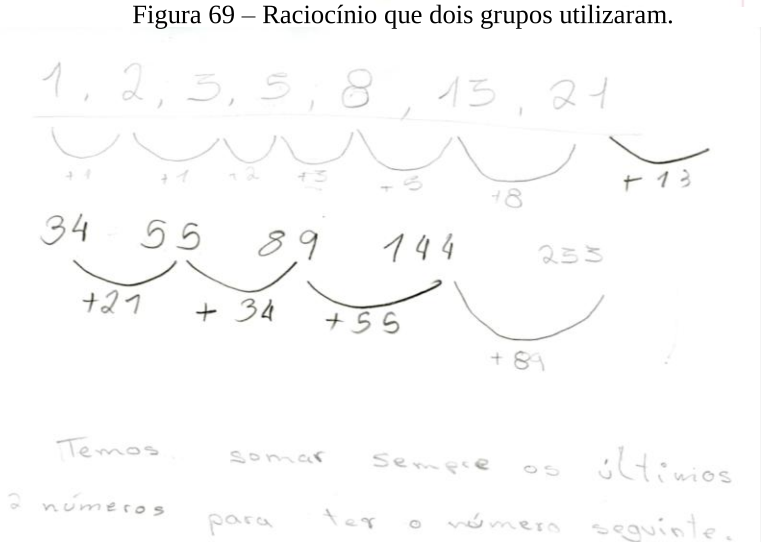


Figura 70 – Raciocínio que os outros cinco grupos utilizaram e que está correto.

Depois de terem generalizado, a professora estagiária referiu que esta era a sequência de Fibonacci, um famoso matemático italiano e falou um pouco sobre ele, bem como onde podíamos encontrar a presença desta sequência na natureza (no número de pétalas, na disposição dos ramos das árvores, na reprodução dos coelhos, …) Após esta parte, como forma de ligar com as ciências naturais, nomeadamente com os conteúdos do 5.º ano, a professora estagiária tinha uns cartões com os grupos taxonómicos de cada flor, (classificação dos seres vivos), em que esta lia e os alunos tinham que identificar de que flor se tratava. Quando esta lia o género, já muitos conseguiam identificar qual a flor de que se estava a referir. Houve flores em que foi mais difícil, como o caso do alecrim, do botão de ouro, do malmequer e do girassol. As outras flores identificaram rapidamente. A professora estagiária facultou a cada grupo os respetivos cartões das flores que tinham.

O último momento desta sessão foi destinado à construção de um herbário. Para isso, a professora perguntou aos alunos o que era e para que servia. Como indicações, referiu que tinham de colar cada flor numa cartolina, colar os respetivos cartões, escrever o nome da flor (pelo qual era normalmente conhecida), o número de pétalas e fazer a legenda da flor, segundo as suas partes, pois os alunos tinham abordado a diversidade nas plantas, dado que, mais uma vez, pretendia-se fazer a transversalidade com as ciências. Após a construção, cada grupo apresentou as suas cartolinas, para no final, juntarmos tudo para o herbário de Fibonacci (consultar apêndice V, fotos 5 – 20). Esta tarefa permitiu que os alunos conhecessem esta sequência, bem como o matemático e que fizessem uma ligação com os conteúdos abordados em ciências naturais.

2.ª Tarefa: O herbário de Fibonacci em verso

Esta tarefa foi realizada em 30 minutos, numa aula de Português, no dia 13 de maio de 2013. Tinha como objetivo construir "O Herbário de Fibonacci em verso", ou seja, escrever textos poéticos relacionados com as flores que tinham sido abordadas, para além de treinar a escrita, uma vez que os alunos não tinham tido mais atividades de escrita por falta de tempo, logo, gerou-se uma oportunidade para treiná-la, pois também como na altura se estava a dar o texto poético, aproveitou-se para a criação de poemas sobre as flores abordadas na sequência de Fibonacci. Formaram-se 7 grupos, e em cada grupo, à semelhança da tarefa anterior, distribuiu-se as flores abordadas no herbário. O que era pedido aos alunos era escreverem um poema sobre as flores que tinham presentes nas mesas. O grupo 1 tinha jarros e antúrios e, por isso, fizeram um poema sobre estas duas flores. O grupo 2 tinha estrelicías e flor de mírtilo e escolheram a estrelícia. O grupo 3 tinha o lírio e por isso tiveram que escrever sobre este. O grupo 4 tinha mais flores, tais como o alecrim do norte, a orquídea, o botão de ouro e o ciclame. Destas flores, o grupo escreveu um poema sobre o alecrim. O grupo 5 abordou a rosa (quando está fechada, tem 8 pétalas). O grupo 6 tinha um malmequer, então também tinha que escrever sobre essa flor. O grupo 7 tinha um arctotis e um girassol, mas optaram por escrever sobre o último, dado que estavam mais familiarizados com esta flor do que com a outra.

Os alunos mostraram-se bastante interessados e empenhados, pois estavam sempre a solicitar as professoras (estagiárias e a professora cooperante) para perguntar se as suas ideias podiam ser aceites, se gostávamos, se podíamos dizer quais as palavras que rimavam com as que eles queriam, entre outros momentos que ilustram o entusiasmo deles. No fim, cada grupo leu o seu poema (consultar apêndice V, fotos 21 – 27).

Esta tarefa permitiu que os alunos construíssem poemas, ou seja, que fizessem uma tarefa de escrita poética sobre as flores abordadas anteriormente. Se tivesse outra oportunidade de voltar a implementar esta tarefa, em vez de formar grupos de 4, formaria díades, pois assim os alunos envolviam-se mais e escreveriam mais poemas, o que originaria uma autoria e autonomia maior por parte deles.

3.ª Tarefa: A espiral de Fibonacci:

1.ª Parte: Construção da espiral na folha quadriculada.

Esta primeira parte foi numa aula de Educação Tecnológica, durante os primeiros 45 minutos, no dia 10 de maio de 2013 (consultar apêndice III). Para isso, inicialmente foi referido que estiveram a abordar a sequência de Fibonacci, solicitou-se para que lembrassem os primeiros números da sequência, bem como a regra de formação. Após esta introdução que era necessária para eles se relembrarem da sequência, a professora estagiária facultou uma ficha informativa a explicar como se construía os quadrados que envolvem a espiral, para depois a traçarem. Todos os alunos conseguiram realizar esta primeira parte. Porém, convém realçar, que de 27 alunos que estavam presentes, 11 alunos conseguiram fazer tudo sem nenhum tipo de ajuda, desde a construção dos quadrados adjacentes até ao desenho da espiral com o compasso. Um destes alunos até ajudou o colega do lado. Houve 13 alunos que conseguiram desenhar bem os quadrados, mas depois pediram ajuda para desenhar a espiral, isto porque não sabiam onde haviam de posicionar o compasso para fazer os quartos de circunferências até um certo ponto, o que se pode concluir que em termos de geometria, eles têm algumas dificuldades, pois não desenham rigorosamente bem os segmentos de reta paralelos, têm dificuldades em manusear o compasso, pois agarram com muita força, visto que não se lembram que um compasso é sempre segurado na parte superior. Os outros três alunos enganaram-se no início com a construção dos quadrados, porque não estavam a imaginar a espiral e tiveram que voltar a fazer, porque eles faziam retângulos e não quadrados, em que depois chegava-se a um certo ponto em que eles próprios viam que algo estava a falhar, o que fazia com que procurassem o que falhou na construção. No momento de traçar as espirais, estes três alunos pediram ajuda para aplicar o compasso nos pontos certos, de forma a traçá-la. Os alunos não sabiam onde colocar a ponta seca do compasso e a mina. Para os ajudar, a professora estagiária dava sempre a indicação de que "imaginem que estão a traçar a espiral", temos que imaginar que estamos a traçá-la e temos de verificar qual o sentido que ela está a tomar e se temos espaço para a desenhar. "Têm de experimentar. Não se esqueçam do sentido em que a espiral vai…" (consultar apêndice V, parte d).

Esta primeira parte foi realizada porque a professora estagiária pretendia que eles se apropriassem da construção da espiral, para depois não ser uma construção desconhecida quando passassem para as cartolinas, em que estão num ponto maior e sem papel quadriculado.

2.ª Parte: Construção da espiral na cartolina.

A segunda parte desta tarefa foi concretizada numa aula de 90 minutos de Educação Tecnológica, no dia 17 de maio de 2013. Para isso, a professora estagiária esteve a lembrar-lhes o que fizeram na última aula, para se relembrarem da sequência e da construção da espiral.

A professora pediu para que consultassem as fichas com as indicações, (nota-se que alguns alunos têm dificuldades na interpretação das questões e afirmações apresentadas), para que começassem a construir em grupo, a espiral de Fibonacci, de forma a ocupar o máximo possível da cartolina. A unidade de medida era 1 cm.

Os sete grupos formados tiveram que voltar a fazer a espiral de novo, porque viam que chegava a um determinado número (a medida de lado do quadrado, que corresponde a um número da sequência de Fibonacci) e já não conseguiam desenhar mais quadrados. As professoras tiveram que ver com os alunos onde é que estes falharam para se poder aproveitar as construções já realizadas, ou então, começar a desenhar de novo. Em todos os grupos, estas tiveram que começar, para eles poderem continuar até ao quadrado que tinha 34 cm de lado. Como se observou num grupo, eles não conseguem imaginar o sentido da espiral, isto é: eles tinham de desenhar os quadrados, conforme a direção da espiral. Verificou-se que tal como na 1.ª parte, eles têm dificuldades ao nível da geometria, pois em termos de espaço, eles tiveram dificuldades em ocupar a folha como devia ser, há certos objetos que eles não sabem manipular corretamente, como o caso do compasso, em que eles seguram com muita força e seguram com as duas mãos, quando devia ser só com uma e na parte superior deste.

Depois de alguma ajuda na construção da espiral, os grupos traçaram a espiral com o compasso grande (no último quadrado, que media 34 cm de lado). Após a construção, os alunos passaram com carvão por cima da espiral, com o objetivo de a realçar. Contudo, apesar da advertência para o carvão poder manchar e sujar, algumas cartolinas ficaram um pouco manchadas.

A última parte foi a entrega de sete grupos de imagens, que servia para eles ordenarem por tamanho e colarem na espiral, dentro dos quadrados, mas na zona que fosse ocupada pela espiral. Neste momento, os grupos reagiram bem, pois todos ordenaram e colaram adequadamente. Em cada grupo, ia abordando cada ser vivo que eles tinham, pois como forma de realçar mais uma vez, a transversalidade com as ciências, pois os sete grupos de imagens eram alusivos à diversidade dos animais e das plantas (ursos polares, foca, náutilo, coruja, borboleta, tigres e o girassol). Estes tinham de colar na direção da espiral.

Esta tarefa permitiu que construíssem a espiral de Fibonacci e que desenvolvessem o manuseamento do compasso e a técnica da colagem. Porém, se tivesse uma oportunidade de voltar a implementar a tarefa, um dos aspetos que mudaria seria o trabalho com carvão (etapa final), pois constei que os trabalhos estavam quase acabados e quando se solicitou aos alunos para que contornassem a espiral com carvão e por mais que se avisassem dos cuidados para evitar manchas, houve alguns descuidos e os trabalhos ficaram um pouco manchados. Destaca-se que apesar de ser uma pequena falha, de certa forma foi positiva, pois contactaram com uma nova técnica de pintura (neste caso, associada mais ao contorno) (consultar apêndice V, parte E).

Capítulo 5 — Conclusões

Este trabalho final permite verificar que é possível trabalhar com os alunos as sequências e regularidades, mesmo que estas estejam previstas só no 6.º ano. Foi uma experiência de ensino que foi realizada com alunos do 5.º ano, mas prova que é possível os alunos poderem contactar com este tipo de trabalho antes, dado que segundo os seus comentários, ajuda-os a desenvolver o seu raciocínio matemático, bem como a comunicação matemática e são atividades interessantes em que se trabalha a matemática em contexto com outras áreas. É possível realizar experiências de ensino e os alunos reagirem bem, mesmo no 5.º ano. É sempre uma mais valia para os próximos anos, quando tiverem que abordar esses conteúdos, pois de certa forma contribui para a aprendizagem deles. É exequível realizar atividades lúdicas e ao mesmo tempo, de aprendizagem em clubes de matemática, pois prepara os alunos para os anos seguintes. Estas atividades promovem o pensamento algébrico, pois tal como afirmam Vale (2012, 2011), Vale e Alvarenga (2007), Vale e Pimentel (2010, 2009 e 2005), Borralho e Barbosa (2011 e 2009), Branco (2008), Cabrita (2009 e 2008), Modanez (2003), Ponte (2009 e 2005), o trabalho com padrões e a busca da regularidade proporciona o desenvolvimento do pensamento algébrico, dado que permite observar, testar, fazer conjeturas e generalizar.

Relativamente à questão "Quais são as estratégias que os alunos do 5.º ano usam para descobrir os termos de uma sequência?" os alunos utilizam muito respostas através de esquemas (inicialmente) e só alguns é que tentam explicar por extenso. Tal como já se tinha referido na fundamentação teórica deste trabalho, os alunos sentem alguma dificuldade em descrever uma generalização por extenso. Quanto às estratégias sugeridas por Ponte, Branco e Matos (2009), estes alunos utilizaram sempre uma estratégia aditiva, pois tem como base o raciocínio recursivo e baseia-se na diferença entre os termos da sequência apresentada, a estratégia do objeto inteiro foi usada apenas para a sequência dos números quadrados, pois estava relacionada com múltiplos e a estratégia da representação e contagem, dado que tiveram de contar o número de caricas que constituía cada figura, para realizar o registo dos números.

No que concerne à segunda questão proposta "Que dificuldades apresentam os alunos do 5.º ano durante a realização de tarefas com sequências e regularidades?", os alunos não chegaram a nenhuma expressão algébrica, contudo, no geral, foram capazes de observar, conjeturar, generalizar e de explicar de uma forma muito simples e natural, a regra de formação de cada sequência (lei de generalização), o que parece indicar que estas atividades contribuíram para o desenvolvimento do pensamento algébrico destes alunos. A linguagem utilizada pelos alunos para expressar a regra geral de formação das várias sequências não evoluiu muito ao longo da proposta pedagógica, pois estes utilizaram uma linguagem natural, com recurso a operações, para expressar a relação entre o termo e a ordem e esquemas. A única sequência em que eles conseguiram calcular qualquer termo de uma ordem qualquer (mesmo que fosse mais distante) foi a sequência de números quadrados, pois bastava multiplicar o número por ele próprio, o que se verifica que nesta situação conseguiram aplicar o raciocínio distante, o que parece que têm dificuldades a nível da generalização distante. Nas outras sequências, eles precisavam de ter chegado à expressão algébrica e por isso tiveram um raciocínio recursivo e não distante, pois calculavam sempre o número seguinte a partir do número anterior. Mesmo assim, em nenhuma sequência numérica, nenhum aluno escreveu a expressão algébrica. Outra das dificuldades apontadas é relativa à comunicação matemática, dado que apesar de se conseguir entender o que eles pretendiam dizer, expressavam-se de forma algo confusa.

Estas tarefas foram uma mais valia para a transversalidade com as outras áreas, nomeadamente com as Ciências Naturais, Português e Educação Tecnológica e até mesmo com a História da Matemática. Porém, os alunos mostraram algumas dificuldades ao nível da geometria, tais como traçar linhas paralelas, o uso do compasso, bem como na interpretação dos enunciados, que também revelam algumas dificuldades. Contudo, a maior parte destas tarefas foram realizadas em grupo, com o apoio da professora estagiária, das colegas e dos professores cooperantes e como nas sessões seguintes, se relembrava o que tinha sido feito anteriormente. Como afirma Godino (2011), quando nos apresenta os indicadores da <u>adequação epistémica</u> (uma das componentes da adequação didática que já foi abordada no enquadramento teórico deste trabalho), na parte da "situação problema", propôs-se situações que levassem os alunos a generalizar, na "linguagem", os alunos utilizaram vários tipos, ou seja, tanto escreveram respostas por extenso como também tentaram dar respostas através de esquemas e desenhos (pictóricas), a nível de "proposições e definições", os enunciados estavam adequados ao nível educativo a que se dirige (2.º Ciclo), porém, ao 5.º ano (apesar das sequências e regularidades se abordarem no 6.º ano), em termos de "argumentos", pretendia-se que os alunos argumentassem as suas respostas, o que se verificou em todas as tarefas propostas. A nível de adequação cognitiva, em termos de “conhecimentos prévios”, os alunos já tinham dado algumas sequências e regularidades no 1.º ciclo (de acordo com o PMEB) e todos, de forma geral, alcançaram os objetivos pretendidos, pois passaram a conhecer os primeiros números de cada sequência proposta e como descobrir o número seguinte. No que concerne à adequação afetiva, teve-se o cuidado de motivar os alunos para a descoberta destas sequências (no caso dos números figurados, o facto de saber quantas caricas iria ter cada figura motivou os alunos para a descoberta de quantas iria ter a próxima e como saber calcular; no caso da sequência de Fibonacci, através da presença desta sequência na natureza, o que justifica a sua forte transversalidade com as ciências naturais, pois está presente nas plantas e animais, para além de outras áreas (arquitetura, arte, música, etc.); na adequação interacional, os alunos participaram todos, ou seja, houve um esforço para que os que tinham mais dificuldades também participassem, o que foi conseguido, pois apesar de não terem acertado em todas as questões, pelo menos responderam acertadamente em algumas, comunicavam com os outros elementos do grupo para partilhar a informação e compreenderam as correções em grande grupo; a nível de adequação mediacional, os alunos tinham os materiais à sua disposição, a professora estagiária também levou materiais para auxiliar nas tarefas e proporcionou algum tempo para a partilha de ideias em grupo, também para pensarem sozinhos, experimentarem e escreverem depois as suas respostas nos enunciados facultados, apesar de eles não terem chegado a uma expressão algébrica (como anteriormente foi referido, contudo, era necessário um nível de abstração maior, nível este que eles ainda não estão preparados, devido à sua faixa etária), mas também se coloca uma questão: mesmo assim, se se tivesse facultado mais tempo aos alunos, será que poderiam chegar à alguma expressão algébrica? Destaca-se que embora se tenha facultado algum tempo para a realização das tarefas, este considera-se como um factor limite. Por último, a adequação ecológica, foi também tida em conta, pois estas tarefas estão relacionadas com o tópico “Sequências e regularidades”, no tema “Álgebra”, no 2.º Ciclo e tinham várias conexões interdisciplinares, pois como se pode verificar no capítulo destinado à unidade de ensino, estas tarefas possuem um carácter transversal com as Ciências Naturais (como já foi referido anteriormente), com Português (escrita de textos poéticos) e Educação Tecnológica (rigor no uso de instrumentos de trabalho, neste caso, compasso, régua e esquadro), bem como as conexões intradisciplinares, nomeadamente, com a História da Matemática.

Estas tarefas têm como objetivo desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. Segundo Ponte (2005), existem vários tipos de tarefas: problemas, exercícios, tarefas de investigação e tarefas de exploração. Pode-se afirmar que estas tarefas têm um carácter predominantemente exploratório. Inicialmente, verificou-se que os alunos estavam a "explorar" estas sequências. Contudo, nas últimas sessões, notou-se que em alguns alunos, estas tarefas podiam considerar-se "exercícios", pois já sabiam como poderiam descobrir os números seguintes nas outras sequências, para além da rapidez com que as exerceram.

Os alunos são dotados de extraordinárias capacidades de conjeturar e generalizar. Estas devem ser exploradas pelo professor para que os alunos venham a gostar mais de matemática. Nesse sentido, o professor deve ser criativo e usar estratégias que lhe permitam explorar esse potencial dos alunos, propor-lhes desafios e incentivá-los a serem persistentes nas suas resoluções. A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação pode contribuir para o desenvolvimento do PA, permite o estabelecimento de conexões matemáticas (a ligação entre a Álgebra e a geometria, ou Álgebra e história da matemática, por exemplo, o que se realça aqui a adequação ecológica, pois estabelece conexões intra e interdisciplinares) e desenvolve a comunicação matemática através do uso de uma linguagem (escrita e oral) adequada à situação e melhora a imagem da Matemática. No que concerne ao gosto pela disciplina, cresceu o "bichinho do querer descobrir", pois em relação à abordagem dos números figurados, quando acabaram as sessões relativas a esta atividade, os alunos perguntaram se não iríamos continuar a abordar mais números, pois um deles referiu que podíamos falar sobre os heptagonais e os octogonais. Contudo, considerou-se que se devia fazer uma pausa nesta atividade, pois faltava abordar a sequência de Fibonacci e poderia precisar dessas sessões do clube de matemática para abordá-la. Isto permite concluir que ficou nos alunos a ideia de que associado aos padrões estará, sempre, algo relacionado com a descoberta e a emoção, visto que mostraram uma grande motivação na descoberta da regra associada a sequência (lei de generalização). Com esta experiência de ensino pode-se concluir que a realização de tarefas exploratórias são atividades desafiadoras para os alunos e quando envolvem sequências, estas são um bom ponto de partida para trabalhar o PA, já que a procura e identificação de padrões realça a exploração e a conjetura.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) invoca o desenvolvimento do pensamento algébrico. Este facto representa um grande desafio para todos os professores, pois segundo alguns autores, estes dedicam pouco tempo à tarefas que envolvam a exploração matemática e ao desenvolvimento do PA, pois alguns professores ainda pensam que quando se fala de pensamento algébrico este aborda-se em tópicos como equações e funções, o que, como já foi fundamentado neste trabalho, não se cinge apenas a estes dois tópicos, dado que o pensamento algébrico envolve a observação, o teste e a generalização. As atividades com sequências numéricas são uma excelente forma para promover este pensamento, porque apesar dos alunos deste estudo não terem chegado a nenhuma expressão algébrica, a grande maioria foi capaz de generalizar cada sequência abordada. A iniciativa do professor no pensamento algébrico implica uma aposta no raciocínio dos alunos e na construção de conhecimentos matemáticos, dado que os alunos constroem sempre conhecimento matemático mesmo os que têm mais dificuldades. Verificou-se que muitas dessas dificuldades foram superadas graças ao envolvimento e à motivação que disponibilizaram.

Outra das questões que apraz referir são os materiais manipuláveis com que é possível abordar as sequências de números figurados e a de Fibonacci. Atualmente, pode-se não usar apenas o livro, mas outros materiais. Para esta experiência de ensino, não foi utilizado nenhum manual, pois para as sequências dos números figurados utilizou-se caricas e pequenas fichas (que serviam para posterior análise documental). Para a sequência de Fibonacci apostou-se numa iniciação com flores, para referir que esta estava presente natureza; e na realização de trabalhos pelos alunos (construção do herbário, da espiral de Fibonacci e dos poemas), que serviam também para posterior análise de resultados e dificuldades sentidas por eles.

Convém destacar também o ambiente de sala de aula, pois como já ficou provado neste estudo, apesar destas tarefas não terem sido realizadas em aulas de matemática, é possível desenvolver o pensamento algébrico em outros contextos, dado que as tarefas foram realizadas nas aulas de Educação Tecnológica e no clube de matemática. Em relação aos clubes, o que se sentiu na concretização da proposta de ensino foi que apesar de ser um ambiente bastante lúdico e muito informal, os clubes são ótimos ambientes para o desenvolvimento do pensamento algébrico, através da exploração de tarefas de carácter exploratório. A forma de se dar uma aula centrada no modelo de explicação por parte do professor seguida de aplicação e "treino" por parte dos alunos, não são um contexto favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Estas tarefas partiam sempre da realização dos enunciados pelos alunos e formação dos polígonos através das caricas e só no fim é que se procedia à correção (sempre na sessão seguinte, à excepção dos números hexagonais, pois era a última sessão, logo a correção foi realizada no fim da mesma).

No que concerne à metodologia de investigação usada, a observação participante, a análise documental, as notas de campo e o registo fotográfico, considerou-se que foram as técnicas mais adequadas para esta recolha de dados, pois permitiu descrever o trabalho que os alunos desenvolveram ao longo das tarefas propostas e saber quais as dificuldades que sentiram.

Tal como os alunos, as sequências e as regularidades agradaram-me por serem tarefas de carácter exploratório. Pensa-se que os alunos ficaram mais motivados para a Matemática, pois os seus "feedbacks" foram positivos. Contudo, como curiosidade, lança-se uma questão: e se estas tarefas não tivessem sido abordadas em dois ambientes que não foram a sala de aula de matemática, será que os resultados seriam diferentes?

Em jeito de reflexão, apraz dizer que a PPS realizada neste semestre no Colégio D. José I, em Aveiro,), além de ter um Projeto Educativo de Escola de referência, uma ótima relação com os encarregados de educação e um ambiente favorável de trabalho foi muito importante para o desenvolvimento deste trabalho. O pessoal docente e não docente sempre foram muito acessíveis, em especial, os professores destas turmas e das áreas envolvidas foram uma mais valia para que este trabalho pudesse ser realizado, pois davam sugestões de procedimentos a adotar, tiravam dúvidas a nível científico, tornaram o clima bastante favorável para realizar um bom trabalho com os alunos e ajudaram na motivação dos alunos.

Para finalizar este trabalho, com base nos pressupostos teóricos de Ponte (2002), um professor deve ter sempre em conta a formação pessoal, a formação científica, a educacional, e a prática, pois um professor é (ou devia ser) acima de tudo, um cidadão com valores, que possui um saber científico que pretende partilhar com os seus alunos. A nível educacional, pretende-se que um professor seja um educador e não um "instrutor", pois as aulas expositivas não permitem que os alunos comuniquem as suas ideias, e por último, a nível prático, o professor tem que se esforçar por adequar cada vez melhor as suas práticas às situações que lhe aparece à sua frente, ou seja, precisa de saber lidar com os imprevistos.

Se considerar o impacto que este trabalho teve a nível pessoal e a nível profissional, de acordo com os objetivos deste curso "qualificar profissionalmente para o desempenho docente nas quatro áreas", o que considero uma mais valia, apesar de ter sempre uma preferência para uma área, contudo, habilita-me para mais hipóteses de trabalho dado que fico minimamente preparada para leccionar 4 áreas. Quanto ao objetivo: "proporcionar o desenvolvimento de um perfil de formação adequado ao exercício desta atividade profissional, assente em competências de intervenção educativa, capacidade de investigação e aprendizagem ao longo da vida", vejo como uma mais valia, pois permitiu-me uma oportunidade de investigar um determinado tema num grupo, possibilitou-me uma intervenção educativa num contexto de 2.º ciclo (este semestre), o que foi ótimo, pois sempre me fascinou este ciclo e por último, considero que este esforço valeu a pena. Posso afirmar que enriqueceu muito os meus conhecimentos, principalmente no que concerne ao pensamento algébrico, pois conhecia muito pouco sobre este tema. Este contexto foi favorável ao conseguir os objetivos previstos nesta PPS, pois para além de me ter permitido atingir os objetivos previstos, possibilitou-me a mobilização dos vários conhecimentos das áreas envolvidas numa única experiência de ensino e refiro ainda que as reuniões após estas sessões de trabalho (seminários na universidade com a professora orientadora e as trocas de ideais com os professores cooperantes do contexto pedagógico da PPS) promoveram a minha reflexão de competência crítica sobre toda esta minha intervenção.

Ao nível pessoal, criei uma grande afinidade com a maioria dos alunos que foram envolvidos neste estudo. Saliento que a relação que estabeleci com os alunos participantes do estudo, contribuiu, também para a forma como ocorreram as tarefas, pois um ambiente onde se gera uma cumplicidade e amizade reflete-se nos resultados. Esta investigação contribuiu para o meu desenvolvimento humano, pois aprendi a ter mais calma com os alunos, porque muitas vezes, estes surpreendem os professores e estes surpreenderam-me bastante. Mesmo assim, tenho a noção de que é preciso melhorar a minha prática pedagógica, pois estamos sempre a aprender e o facto de por vezes não contarmos com algumas dificuldades que os alunos têm, obriga-nos a repensar na nossa prática, sempre com o objetivo de a tornar cada vez melhor, dado que considero que as dificuldades que os meus futuros alunos terão, serão para mim, um “motor” de futura aprendizagem, pois aprender a superá-las é uma das formas de enriquecer a nossa prática pedagógica.

Referências bibliográficas:

- ✓ Abrantes, Paulo; Serrazina, Lurdes; Oliveira, Isolina (1999). A matemática na Educação Básica. Lisboa: Ministério da Educação.
- ✓ Almeida, Maria (2010). *Web 2.0 e padrões na aprendizagem da matemática*. Aveiro: Universidade de Aveiro (Dissertação de Mestrado).
- ✓ Alvarenga, D. e Vale, I. (2007). *A exploração de problemas de padrão. Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Quadrante, XV, 1, 27-55. Artigo disponível em: http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2007_11.pdf. Artigo acedido em 1 de dezembro de 2012.
- ✓ Atalia, Manuel Ferreira (2009). *À volta dos números poligonais*. Revista educação e matemática, n.º 101, p. 32-33.
- ✓ Barbosa, Ana (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Universidade do Minho. Dissertação de Doutoramento.
- ✓ Barbosa, Ana, Vale, Isabel, Palhares, Pedro (s.d.). *A resolução de problemas e a generalização de padrões: estratégias e dificuldades emergentes.* Artigo disponível em: http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2008_04.pdf. Artigo acedido em 1 de dezembro de 2012.
- ✓ Bell, Judith (1997). *Como realizar um projeto de investigação: um guia para a pesquisa em ciências sociais e da educação*. Lisboa: Gradiva.
- ✓ Bogdan, Robert; Biklen, Sara (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- ✓ Bolt, Brian (1991). *Atividades matemáticas*. Lisboa: Gradiva.
- ✓ Borralho, António, Barbosa, Elsa (2011). *Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Brasil: XIII CIAEM. Artigo disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1111/604. Artigo acedido em 1 de dezembro de 2012.
- ✓ Borralho, António, Barbosa, Elsa (2009). *Exploração de padrões e Pensamento Algébrico*. Em: Vale, Isabel, Barbosa, Ana (Org.), Padrões. Múltiplas perspectivas e contexto em educação matemática (pp. 59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

- Borralho, António, Barbosa, Elsa (s.d.). *Pensamento algébrico e exploração de padrões*. Artigo disponível em: http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf Artigo acedido em 1 de dezembro de 2012.
- Branco, Neusa (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Lisboa: Universidade de Lisboa. Dissertação de Mestrado.
- Cabrita, Isabel (coord.) (2009). *Perspectivas e vivências emergentes em matemática*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Cabrita, Isabel (2009). *Padrões num contexto de formação inicial de educadores.* Em: Vale, Isabel, Barbosa, Ana (Org.), Padrões. Múltiplas perspectivas e contexto em educação matemática (pp. 69-79). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.
- Cabrita, Isabel (2008). *m@c ½ Programa de formação em matemática com professores do 1.º e 2.º CEB.* Universidade de Aveiro: Departamento de Didática e Tecnologia Educativa.
- Canavarro, Ana (2007). *O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos.* Revista Quadrante, vol. XVI, n.º 2, p. 81-117.
- Cardoso, Maria (2000). *O conhecimento matemático e didático, com incidência no pensamento algébrico de professores de primeiro ciclo do ensino básico: que programas de formação contínua?* Universidade do Minho.
- Cerasoli, Anna (2008). *O 10 magnifico*. Porto: Editorial Âmbar.
- Conway, John, Guy, Richard (1999). *O livro dos números*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Cunha, Cláudia (2010). *A utilização de ferramentas tecnológicas e os processos de aprendizagem: um estudo na introdução à álgebra no 2.º ciclo*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Dissertação de mestrado.
- Devlin, Keith (2002). *Matemática. A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
- DÓliveira, Teresa (2002). *Teses e dissertações. Recomendações para a elaboração e estruturação de trabalhos científicos*. Lisboa: Editora RH.
- Enzensberger, Hans Magnus (2002). *O diabo dos números*. Porto: Edições Asa.
- Estrada, Maria Fernanda (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

- ✓ Fernandes, António (1994). *Métodos e regras para elaboração de trabalhos académicos e científicos.* Porto: Porto Editora.
- ✓ Ferrini-Mundy, Joan, Lappan, Glenda, Phillips, Elizabeth (s.d.). *Experiences with patterning*. Artigo disponível em: http://sdcounts.tie.wikispaces.net/file/view/Experiences+with+patterning.pdf Artigo acedido em 10 de janeiro de 2013.
- ✓ Frabetti, Carlos (2007). *Terríveis matemáticas. Alice no País dos números*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.
- ✓ Frith, Alex, et al. (2012). *O que é isto da matemática?* Alfragide: Texto Editores.
- ✓ Gauthier, Benoît (diretor) (2003). *Investigação social. Da problemática à colheita de dados*. Loures: Editora Lusociência.
- ✓ Godino, Juan (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Universidade de Granada. Departamento de Didática da Matemática.
- ✓ Gordillo (2011). *Evaluación y desarollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros professores*. Granada: Universidade de Granada. Tese de Doutoramento.
- ✓ Hébert, Michelle; Goyette, Gabriel; Boutin, Gérald (s.d). *Investigação qualitativa. Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.
- ✓ Ketele, Jean-Marie; Roegiers, Xavier (1993). *Metodologia da recolha de dados*. Lisboa: Instituto Piaget.
- ✓ Lapérrière, Anne (2003). *A observação direta*. In Gauthier, Benoît (diretor) (2003). Investigação social. Da problemática à colheita de dados. Loures: Editora Lusociência.
- ✓ McElroy, Tucker (2005). *A to Z of mathematicians*. New York: Facts on file.
- ✓ Mendes, Fernanda (2007). *A matemática na natureza*. Vila Real: Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Dissertação de mestrado.
- ✓ Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- ✓ Modanez, Leila (2003). *Das sequências de padrões geométricos à introdução do pensamento algébrico*. São Paulo: Universidade católica. Dissertação de Mestrado.

- ✓ Morais, Patrícia (2010). *Tarefas da natureza exploratória e investigativa: contributos para a compreensão dos conceitos matemáticos no tema das sucessões.* Lisboa: Universidade de Lisboa. Relatório de prática de ensino supervisionada.
- ✓ NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- ✓ Neves, Eunice (2007). *Episódios da história da matemática para o ensino.* Departamento de Matemática, FCUL.
- ✓ Oliveira, Cristiano (2010). *Razão áurea: suas aplicações e importância no ensino da matemática.* Aparecida de Goiânia: Isntituto Superior de educação.
- ✓ Oliveira, Hélio (2009). *A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico*. Revista educação e matemática, n.º 105, p. 83-86.
- ✓ Orton, Anthony (2009). *Reflections on pattern in the mathematics curriculum.* Em: Vale, Isabel, Barbosa, Ana (Org.), Padrões. Múltiplas perspectivas e contexto em educação matemática (pp. 15-28). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.
- ✓ Orton, Jean (2009). *Pupils´ perception of shape, pattern and trasnformations.* Em: Vale, Isabel, Barbosa, Ana (Org.), Padrões. Múltiplas perspectivas e contexto em educação matemática (pp.81-101). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.
- ✓ Pappas, Theoni (2001). *Fascínios da matemática*. Lisboa: Editora Replicação.
- ✓ Pardal, Luís; Correia, Eugénia (1995). *Métodos e técnicas de investigação social*. Porto: Areal Editores.
- ✓ Pimentel, Teresa, et al. (2010). *Matemática nos primeiros anos. Tarefas e desafios para a sala de aula*. Lisboa: Texto Editores.
- ✓ Ponte, João Pedro (2009). *Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da matemáica e na formação de professores.* Em: Vale, Isabel, Barbosa, Ana (Org.), Padrões. Múltiplas perspectivas e contexto em educação matemática (pp. 169-175). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.
- ✓ Ponte, João Pedro, Branco, Neusa, Matos, Ana (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.
- ✓ Ponte, João Pedro (2005). *Gestão curricular em matemática*. Em GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM. Documento

disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf Artigo acedido em 13 de dezembro de 2012.

- ✓ Ponte, João Pedro (2005). *A álgebra no currículo escolar.* Revista educação e matemática, n.º 85, p. 36-42.
- ✓ Quivy, Raymond; Campenhoudt, LucVan (2008). *Manual de investigação em ciências sociais.* Lisboa: Gradiva.
- ✓ Ramos, Ana Margarida (2007). *Livros de palmo e meio*. Lisboa: Editorial Caminho.
- ✓ Reimer, Luetta, Reimer, Wilbert (1990). *Matematicians are people, too*. Canadá: Dale Seymour Publications.
- ✓ Reis, Felipa (2010). *Como elaborar uma dissertação de mestrado*. Lisboa: Editora Lidel.
- ✓ Rogers, Kirsteen, Large, Tori (2011). *Matemática ilustrada*. Porto: Porto Editora.
- ✓ Ruas, Branca; Grosso, Carlos (2002). *Números e operações aritméticas*. Lisboa: Escola Superior de Educação João de Deus.
- ✓ Santos, Madalena; Oliveira, Hélia (2008). *Generalização de padrões: Um estudo no 5.º ano de escolaridade.* Documento disponível em: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Apo01SantosOliveira.pdf Artigo acedido em 13 de dezembro de 2012.
- ✓ Sequeira, Luís; Freitas, Pedro; Nápoles, Suzana (2009). *Números e operações. Programa de Formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- ✓ Sim-Sim, Inês (2007). *O ensino da leitura: a compreensão de textos*. Lisboa: Ministério da Educação.
- ✓ Soares, José (2010). *Ferramentas informáticas.e os padrões de matemática no 1.º Ciclo*. Aveiro: Universidade de Aveiro. Dissertação de Mestrado.
- ✓ Tahan, Malba (1973). *As maravilhas da matemática*. Rio de Janeiro: Bloch Editores.
- ✓ The Fibonacci association (1969). *The Fibonacci quarterly: Fibonacci and Lucas numbers.* California: University of Santa Clara. Disponível em:

http://www.fq.math.ca/Books/Complete/fibonacci-lucas.pdf. Artigo acedido em 3 de março de 2013.

- The Fibonacci association, (1973). *The Fibonacci quarterly: number theory tales.* The United States of America. Disponível em: http://www.fq.math.ca/Books/Complete/numbertheory-tables.pdf. Artigo acedido em 3 de março de 2013.
- Vale, Isabel (2012). *As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos*. Revista Interacções, n.º 20, p. 181-207.
- Vale, Isabel, Pimentel, Teresa, Alvarenga, Dina, Fão, António (2011). *Uma proposta didática envolvendo padrões. 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- Vale, Isabel, Pimentel, Teresa (2010). *Padrões e conexões matemáticas no Ensino Básico*. Revista educação e matemática, n.º 110, p. 33-38.
- Vale, Isabel (2009). *Das tarefas com padrões visuais à generalização.* XX SIEM. EM J. Fernandes, H. Martinho & F. Viseu (Org.), Actas do Seminário de Investigação Matemática, PP.35-63. Viana do Castelo: APM.
- Vale, Isabel, Pimentel, Teresa (coord.) (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática. Propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: Instituo Politécnico de Viana do Castelo.
- Vale, Isabel, Barbosa, Ana, Fonseca, Lina, Pimentel, Teresa, Borralho, António, & Cabrita, Isabel (2008). *Padrões no currículo de Matemática: presente e futuro*. In R. González, B. Alfonso, M. Machín, L. Nieto (Org.), Investigación en Educación (pp.477-493). Badajoz: SEIEM, SPCE, APM. Disponível em: http://ria.ua.pt/bitstream/10773/9077/1/%282008%29%20Padr%c3%b5es%20no%20Curr%c3%adculo%20de%20Matem%c3%a1tica%20Presente%20e%20Futuro.pdf. Consultado em 13 de dezembro de 2012.
- Vale, Isabel, Palhares, Pedro, Cabrita, Isabel, Borralho, António (2006). *Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra.* Em: Vale, Isabel, Pimentel, Teresa; Barbosa, Ana, Fonseca, Lina, Santos, Leonor & Canavarro, Paula (Org.) Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Lisboa: Secção de Educação. Disponível em: www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Vale-Palhares-Cabrita-Borralho.doc. Capturado em 13 de dezembro de 2012.

- ✓ Vale, Isabel, Pimentel, Teresa (2005). *Padrões: um tema transversal do currículo.* Revista educação e matemática, n.º 85, p. 14-21.
- ✓ Vale, Isabel (s.d.). *Resolução de tarefas com padrões em contextos figurativos: exemplos de sala de aula*. Artigo disponível em: http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/ivale-palestratexto.pdf. Arquivo capturado em 13 de dezembro de 2012.
- ✓ Ventura, Ana (2008). *Nós, os outros… e os padrões no pré-escolar.* Aveiro: Universidade de Aveiro. Dissertação de Mestrado.

Documentos consultados

- ✓ Buescu, Helena; Morais, José; Rocha, Maria Regina; Magalhães, Violante (2012). *Metas curriculares de Português. Ensino Básico.* Lisboa: DGIDC.
- ✓ Planificação de ciências naturais do 5.º ano, do colégio onde se realizou a prática pedagógica supervisionada 2.
- ✓ Rodrigues, António (coord.) (2012). *Metas curriculares de Educação Tecnológica*. 2.º Ciclo. Lisboa: DGIDC.
- ✓ Rodrigues, António (coord.) (2012). *Metas curriculares de Educação Visual*. 2.º Ciclo. Lisboa: DGIDC.
- ✓ Plano Anual de Atividades e Formação do Colégio D. José I.
- ✓ Projeto Curricular de Escola do Colégio D. José I.
- ✓ Projeto Educativo de Escola do Colégio D. José I.
- ✓ Regulamento Interno do Colégio D. José I.

Sites consultados no dia 2 de janeiro:

- ✓ http://www.filosofia.com.br/historia_show.php?id=12
- ✓ https://sites.google.com/site/celi2matematica/Historia
- ✓ https://sites.google.com/site/celi2matematica/home
- ✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras
- ✓ http://www.suapesquisa.com/pesquisa/pitagoras.htm
- ✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea

✓ http://lem.ime.usp.br/imatica/index.php?option=com_content&view=article&id=53:numeros-figurados&catid=12&Itemid=6

✓ http://lem.ime.usp.br/imatica/index.php?option=com_content&view=article&id=14:pitagoras-de-samos&catid=7:biografias&Itemid=2

✓ http://greciantiga.org/arquivo.asp?num=0316

✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B3ria_da_matem%C3%A1tica

✓ http://www.oocities.org/es/christianjqp1/especial/grega.htm

✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_grega

Sites consultados no dia 19 de março:

✓ http://pt.scribd.com/doc/64585981/19/A-sucessao-de-Fibonacci-na-Natureza
✓ http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/curiosida.htm
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Fibonacci#A_Sequ.C3.AAncia_de_Fibonacci_na_natureza
✓ http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/numeros.htm
✓ http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm31/biografia.htm
✓ http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro.htm
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Anthurium
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Jarro-de-it%C3%A1lia
✓ http://en.wikipedia.org/wiki/Iris_pseudacorus
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Alecrim
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Orqu%C3%ADdea
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Cyclamen
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Chrysanthemum
✓ http://en.wikipedia.org/wiki/Glebionis_segetum
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Malmequer
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Girassol
✓ http://pt.wikipedia.org/wiki/Nautilidae

* Figura apresentada por Vicenç Font em 7 de Março de 2007, no fórum virtual http://es.groups.yahoo.com/group/teoria-edumat/

Apêndices

Apêndice I

(Pedido de autorização à Direção Pedagógica do Colégio).

Estimados senhores de direção pedagógica:

Eu, Sandra Vanessa da Silva de Jesus, na qualidade de estagiária, venho solicitar autorização para a recolha de dados, que serão obtidos através de observação de aulas, com possível gravação áudio, na turma B do 5.º ano, no âmbito de uma investigação de Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico da Universidade de Aveiro, bem como, a observação de aulas dos alunos do 5.º ano do clube de matemática.

Informo que esta investigação não interfere no normal funcionamento das atividades letivas. Quer no processo de recolha de dados quer no relatório da investigação, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade dos alunos e da escola e ainda a solicitar autorização aos Encarregados de Educação se necessário.

Agradecendo a vossa atenção ao pedido formulado, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Aveiro, 5 de abril de 2013.
Pede deferimento

____

(Sandra Vanessa da Silva de Jesus)

____

(Membro da Direção Pedagógica)

Apêndice II

(Pedido de autorização à Direção Pedagógica do Colégio D. José I em Santa Joana, Aveiro)

Estimados senhores de direção pedagógica:

Eu, Sandra Vanessa da Silva de Jesus, na qualidade de estagiária, venho solicitar autorização para a recolha de dados, que serão obtidos através de observação de aulas, com possível gravação áudio, na turma B do 5º ano, no âmbito de uma investigação de Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico da Universidade de Aveiro, bem como, a observação de aulas dos alunos do 5º ano do clube de matemática.

Informo que esta investigação não interfere no normal funcionamento das atividades letivas. Quer no processo de recolha de dados quer no relatório da investigação, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade dos alunos e da escola e ainda a solicitar autorização aos Encarregados de Educação se necessário.

Agradecendo a vossa atenção ao pedido formulado, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Aveiro, 5 de abril de 2013.

Pede deferimento

Sandra Vanessa da Silva de Jesus

(Sandra Vanessa da Silva de Jesus)

COLÉGIO D. JOSÉ I
Ensino Pré-Escolar, Básico e Secundário
Santa Joana | 3810-284 | Aveiro
NIF 503903531

(Membro da Direção pedagógica)

Apêndice III – Enunciados facultados aos alunos

1) Números triangulares

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Observa as seguintes figuras. Representam os números triangulares.

1. Quantos pontos terá a 4.ª figura? E a 5.ª?

2. Regista os números que foste obtendo com recurso às caricas.

3. Como podes obter cada número triangular usando o número anterior?

4. Considera o número 22. Decompõe o número usando no máximo três números triangulares. Escreve-os.

5. Faz o mesmo com outros números. O que podes concluir?

2) Números quadrados

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Estas figuras representam os números quadrados.

6. Quantos pontos terá a 4.ª figura? E a 5.ª?

7. Regista os números que foste obtendo com recurso às caricas.

8. Como podes obter cada número quadrangular a partir do número anterior?

9. Explica como a partir de dois números triangulares consecutivos podes obter um número quadrado.

10. Subtrai o quadrado de 6 pelo quadrado de 5. Experimenta com outros números consecutivos. O que podes concluir? Experimenta somar os algarismos iniciais. Que números obténs?

11. O que fazes para descobrir o número de pontos (caricas) de qualquer figura? Escreve uma regra.

Gostaste desta sessão? Explica porquê.

3) Números pentagonais

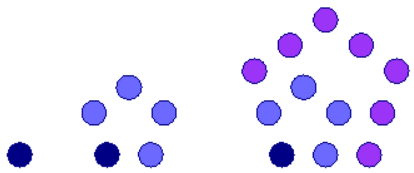


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Estas figuras representam os números pentagonais.

1. Quantos pontos terá a 4.ª figura? E a 5.ª?

2. Regista os números que foste obtendo com recurso às caricas.

3. Explica uma forma de chegar a um número pentagonal de uma ordem qualquer.

4. Compara os números triangulares com os pentagonais. O que podes concluir?

4) Números hexagonais

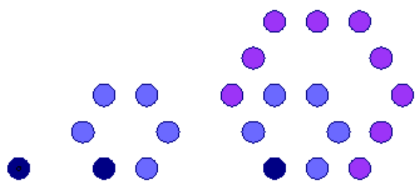


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Estas figuras representam os números hexagonais.

1. Quantos pontos terá a 4.ª figura? E a 5.ª ?

2. Regista os números que foste obtendo com recurso às caricas.

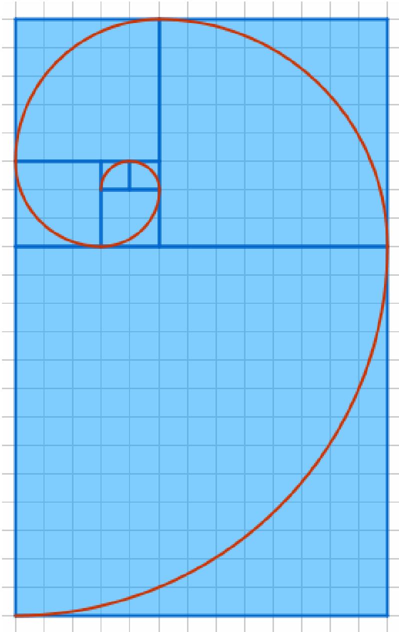
3. Explica uma forma de chegar a um número hexagonal de uma ordem qualquer.

4. Compara os números triangulares com os hexagonais. O que podes concluir?

Gostaste desta sessão? Explica porquê.

5) Processo de construção da espiral logarítmica (colocando a folha na vertical)

A) Desenha (recorrendo também à observação da figura ao lado):



1. Um quadrado que tenha de lado 1 quadrícula.
2. Outro quadrado que tenha de lado uma quadrícula. Este quadrado tem que estar ao lado do que fizeste.
3. Por baixo, junto aos quadrados, um quadrado que tenha de lado 2 quadrículas.
4. Ao lado esquerdo, como podes observar na figura, um quadrado que tenha de lado 3 quadrículas.
5. Um quadrado por cima do anterior, que tenha 5 quadrículas de lado.
6. Um quadrado, ao lado direito, que tenha 8 quadrículas de lado.
7. Um quadrado, por baixo, que tenha 13 quadrículas de lado.
8. No final, traça a espiral, começando no 1.º quadrado que desenhaste.

B) Agora, tenta construir esta mesma espiral numa cartolina branca, em que o primeiro quadrado medirá 1 cm de lado. Utiliza a régua, o esquadro e o compasso. Precisas de saber os primeiros números da sequência de Fibonacci.

Ainda te recordas como
começava a minha sequência?
Escreve os números aqui:

Apêndice IV – Informação sobre as flores

Antúrio 1 Pétala

Classificação científica:

Reino:	Plantae
Filo:	Magnoliophyta
Classe:	Liliopsida
Ordem:	Alismatales
Família:	Araceae
Género:	Anthurium
Espécie:	Anthurium acaule

Figura 71 – Imagem do Antúrio

Podem ser vermelhos, cor-de-rosa e brancos. São exigentes quanto à humidade e estão em locais meio sombrios.

Jarro, Aro 1 pétala

Classificação científica:

Reino:	Plantae
Filo:	Magnoliophyta
Classe:	Liliopsida
Ordem:	Alismatales
Família:	Araceae
Género:	Arum
Espécie:	Arum italicum

Figura 72 – Imagem do Jarro

Cresce em zonas sombrias.

Estrelícia, ave do paraíso 2 pétalas (pode ter mais).

Classificação científica:

Reino:	Plantae
Filo:	Magnoliophyta
Classe:	Liliopsida
Ordem:	Zingiberales
Família:	Strelitziaceae
Género:	*Strelitzia*
Espécie:	*Strelitzia reginae*

Figura 73 – Imagem da Estrelícia

Tem de altura 1,5 metros (aproximadamente). O termo científico desta planta "Strelitzia reginae", significa "estrelícia da rainha", em homenagem à rainha Carlota de Mecklemburgo-Strelitz, esposa do rei Jorge III de Inglaterra.

Flor do mírtilo 2 pétalas

Reino:	Plantae
Filo:	Magnoliophyta
Classe:	Magnoliopsida
Ordem:	Fabales
Família:	Polygalaceae
Género:	*Polygala*
Espécie:	*Polygala myrtifolia*

Figura 74 – Imagem da Flor do mírtilo

Esta planta também dá um fruto, que é o mírtilo, considerado como um fruto silvestre. É do tamanho de uma uva e é arroxeado.

Íris (lírio) 3 pétalas

Reino:	Plantae
Filo:	Angiosperms
Classe:	Monocots
Ordem:	Asparagales
Família:	Iridaceae
Género:	*Íris*
Espécie:	*Iris pseudacorus*

Figura 75 – Imagem do Lírio

Podem ser brancas, roxas ou amarelas. Tem três sépalas caídas e três pétalas eretas.

Alecrim do norte 5 pétalas

Reino:	Plantae
Filo:	Magnoliophyta
Classe:	Magnoliopsida
Ordem:	Lamiales
Família:	Lamiaceae
Género:	*Rosmarinus*
Espécie:	*Rosmarinus officinalis*


Figura 76 – Imagem do Alecrim do norte

O alecrim é um arbusto comum na região do Mediterrâneo. Devido ao seu aroma característico, os romanos designavam-no como *rosmarinus*, que em latim significa *orvalho do mar*. É utilizado para fins culinários (assados, sopas), medicinais (deviso às suas propriedades desinfetantes e chás) e em perfumaria.

Botão de ouro 5 pétalas

Reino:	Plantae
Filo:	Magnoliophyta
Classe:	Magnoliopsida
Ordem:	Raununculales
Família	Raununlaceae
Género:	*Raununculus*
Espécie:	*Raununculus acris*


Figura 77 – Imagem do Botão de ouro

Orquídea 5 pétalas

Reino:	Plantae
Filo:	Magnoliophyta
Classe:	Liliopsida
Ordem:	Asparagales
Família:	Orchidaceae


Figura 78 – Imagem da Orquídea

Apresenta formas, cores e tamanhos variados

Ciclames 5 pétalas

Reino:	Plantae
Divisão:	Magnoliophyta
Classe:	Magnoliopsida
Ordem:	Ericales
Família:	Myrsinaceae
Género:	*Cyclamen*
Espécie:	*Cyclamen* persicum

Figura 79– Imagem dos Ciclames

A planta é pequena, não ultrapassa 20 centímetros, e costuma ser cultivada em vasos de interiores. A planta é de clima ameno, de meia sombra, mas precisa de sol direto durante quatro horas por dia. Desse modo, o ideal é colocá-la próxima à janela, mas protegida do vento.

Rosa (fechada) 8 pétalas

Reino:	Plantae
Divisão:	Angiosperms
Classe:	Eudicots
Ordem:	Rosales
Família:	Rosaceae
Género:	*Rosa*
Espécie:	*Rosa Damascena*

Figura 80 – Imagem da Rosa (fechada)

Possui caules compridos e espinhos. Esta é usada como água de rosas e mel rosado em farmácias.

Malmequer (crisântemos, margaridas,…) 13 ou 21 pétalas

Reino:	Plantae
Divisão:	Angiosperms
Classe:	Asterids
Ordem:	Asterales
Família:	Asteraceae
Género:	*Glebionis*
Espécie:	*Glebionis segetum*

Figura 81 – Imagem do Malmequer

Em grego, crisântemo significa "flor de ouro".

Girassol 21 pétalas, 34, 55 ou mais.

Reino:	Plantae
Divisão:	Magnoliophyta
Classe:	Magnoliopsida
Ordem:	Asterales
Família:	Asteraceae
Género:	*Helianthus* L.
Espécie:	*H. annuus*

Figura 82 – Imagem do Girassol

O seu caule pode atingir até 3 metros de altura. O seu cumportamneto em relação à luz denomina-se de heliotropismo (procura a luz, daí o seu nome, pois “gira à procura do sol” ou “olha para o sol”. Dos seus frutos, popularmente chamados sementes, é extraído o óleo de girassol que é comestível. A semente também é usada na alimentação de pássaros em cativeiro, além de ser uma das mais utilizadas na alimentação de gado, em substituição a outros grãos. Também tem sido utilizada no Brasil na produção de biodiesel.

Arctotis (bom dia) 21 pétalas

Reino:	Plantae
Filo:	Magnoliophyta
Classe:	Magnoliopsida
Ordem:	Asterales
Família:	Asteraceae
Género:	*Arctotis*
Espécie:	*Arctotis fastuosa*

Figura 83 – Imagem do Arctotis

Têm uma cor alaranjada e medem cerca de 60 cm.

Apêndice V

a) Fotos das sessões do clube de matemática, onde se abordaram os números figurados.

Foto 1 – Correção dos números triangulares e quadrados.

Foto 2 – Momento em que os alunos estão a descobrir a relação entre os números triangulares e os pentagonais.

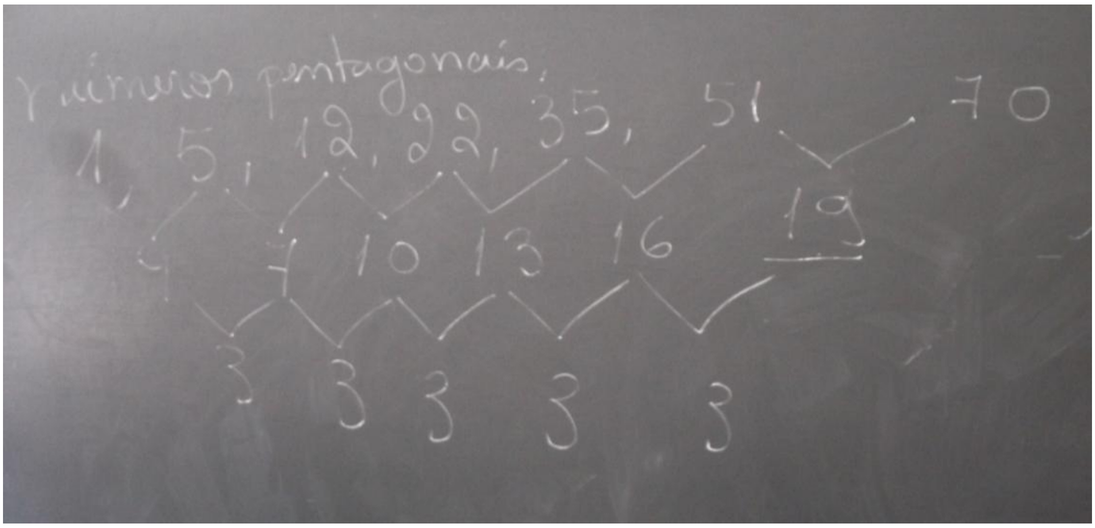


Foto 3 – Esquema sobre a forma como se descobria os números pentagonais.

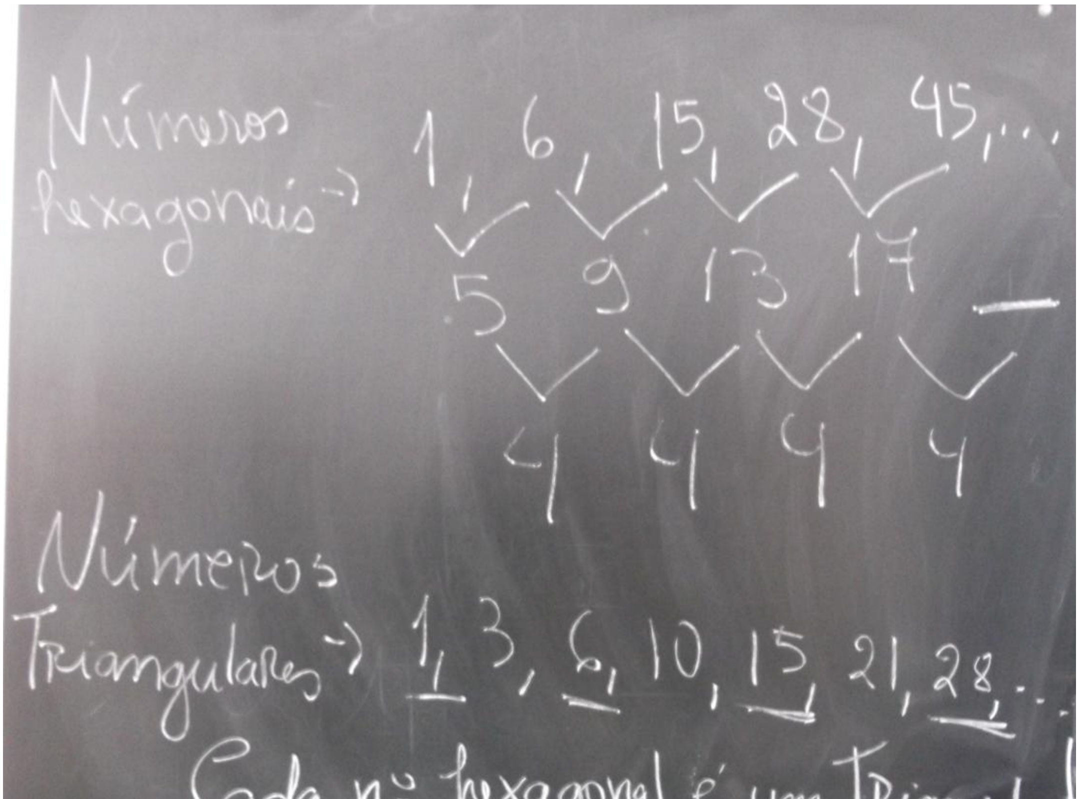


Foto 4 – Esquema sobre a forma como se descobria os números hexagonais e a sua relação com os triangulares.

b) Fotos da construção do “Herbário de Fibonacci” (sequência de Fibonacci)

Foto 5 – Construção do herbário (orquídea).

Foto 6 – Construção do herbário (lírio).

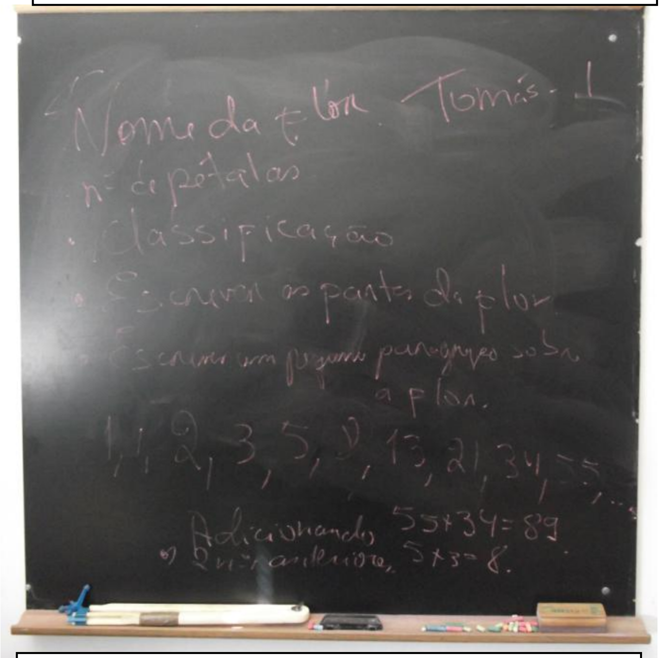


Foto 7 – Requisitos para a construção do herbário.

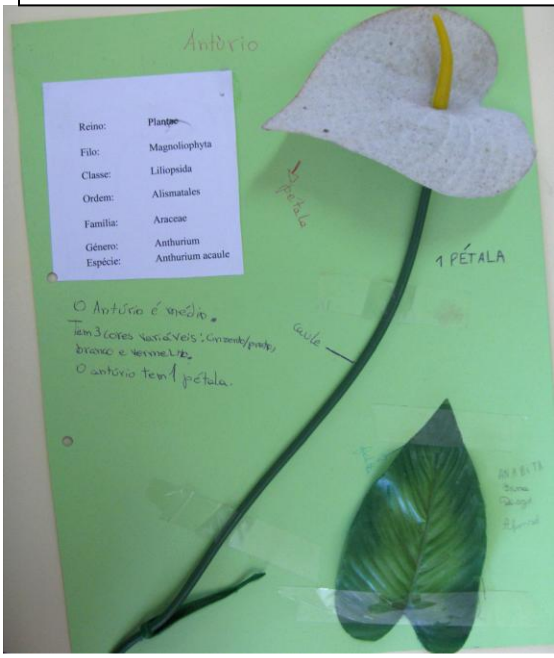


Foto 8 – Produto final do antúrio.

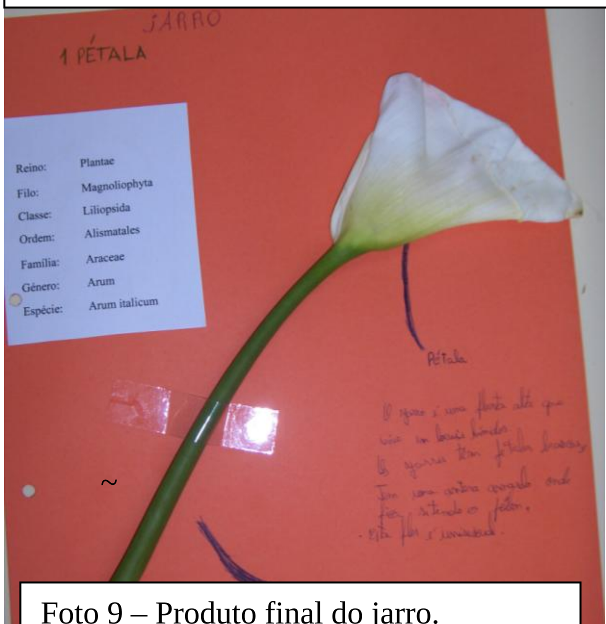


Foto 9 – Produto final do jarro.

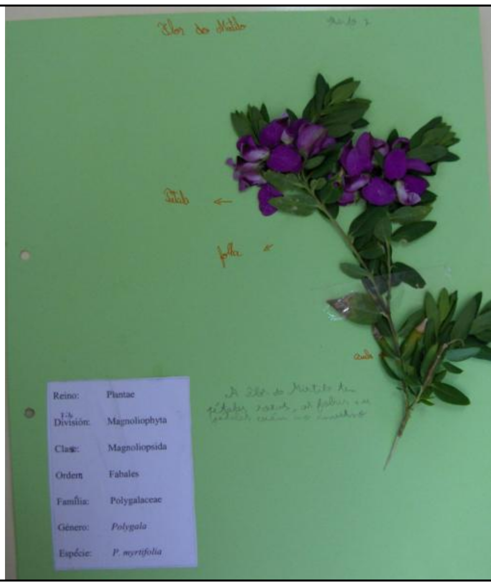


Foto 10 – Produto final da flor do mirtilo.

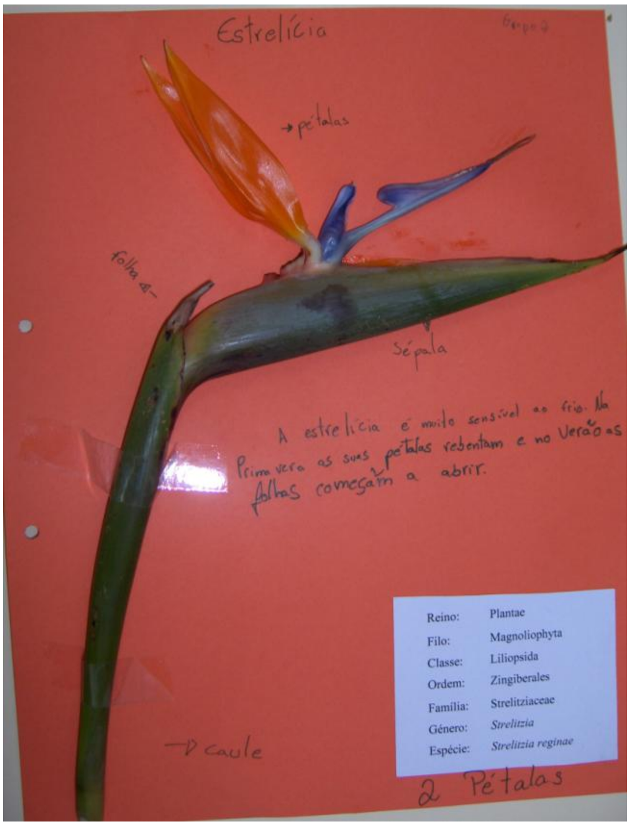


Foto11 – Produto final da estrelícia.

Foto12 – Produto final do lírio.

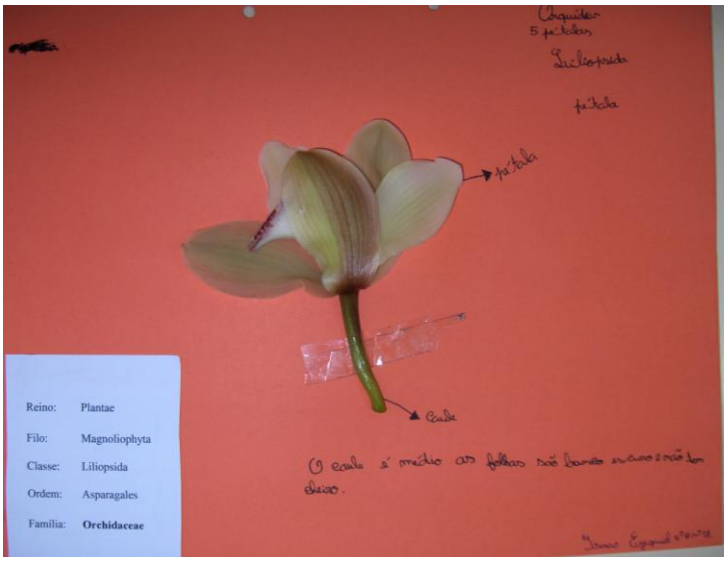


Foto13 – Produto final da orquídea.

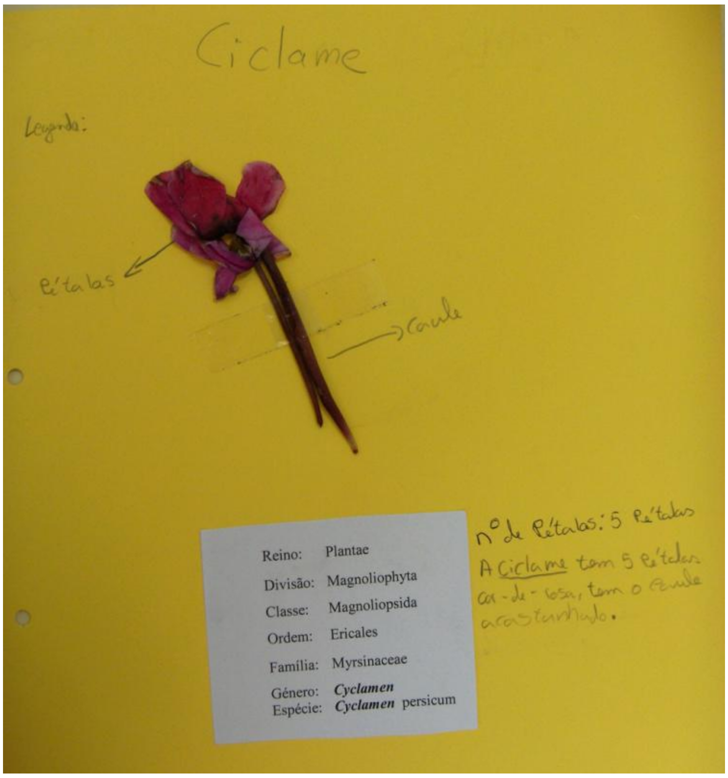


Foto14 – Produto final do ciclame.

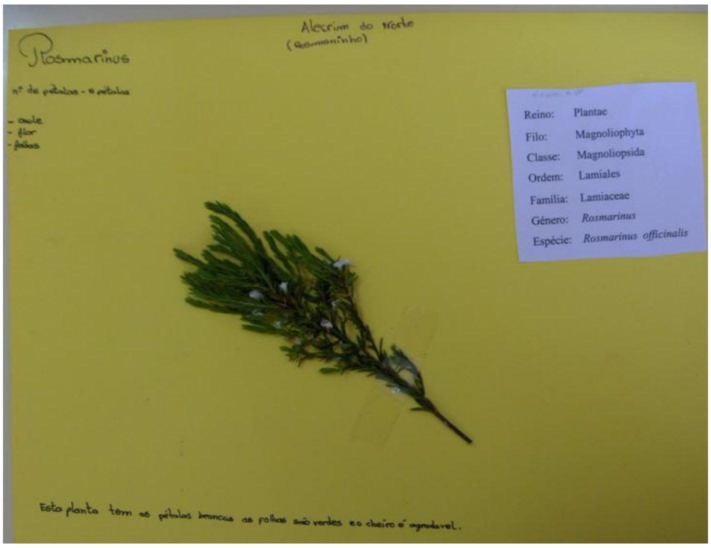


Foto15 – Produto final do alecrim do norte.

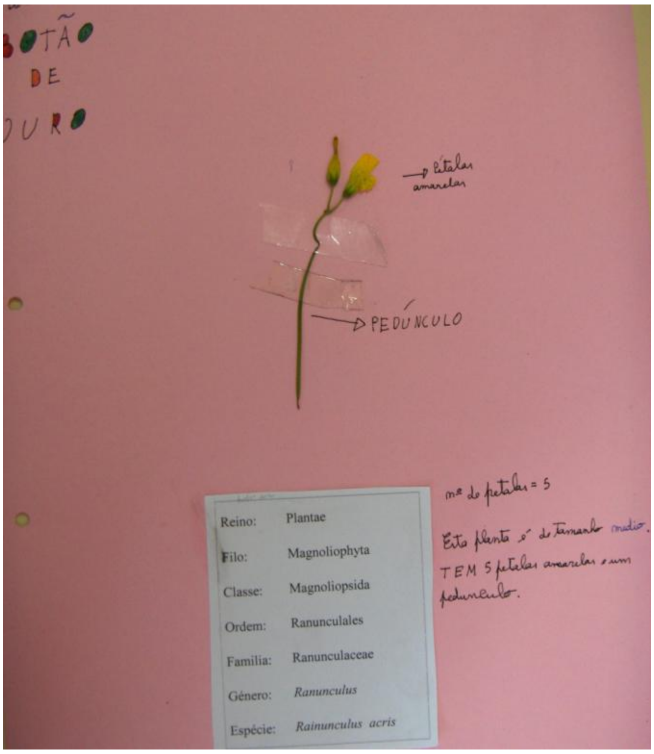


Foto16 – Produto final do botão de ouro.

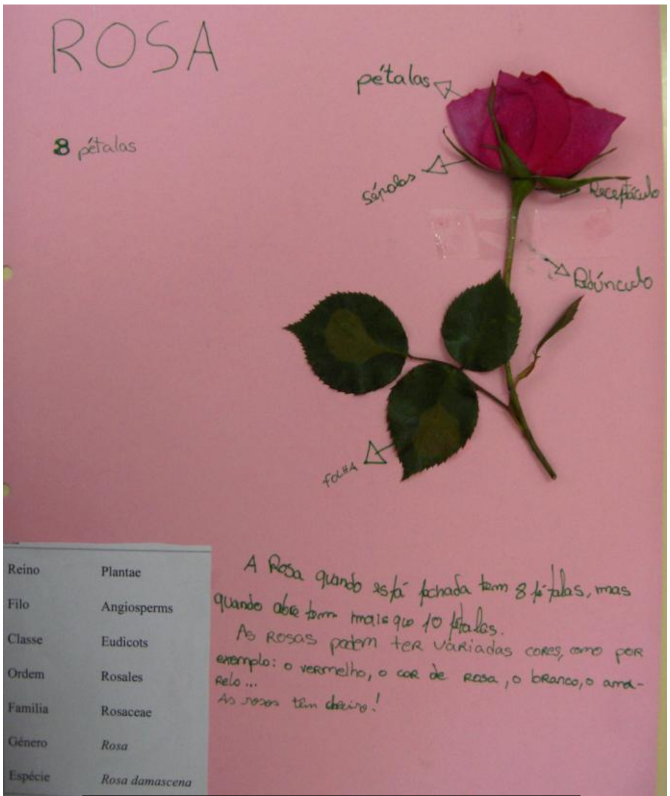


Foto17 – Produto final da rosa.

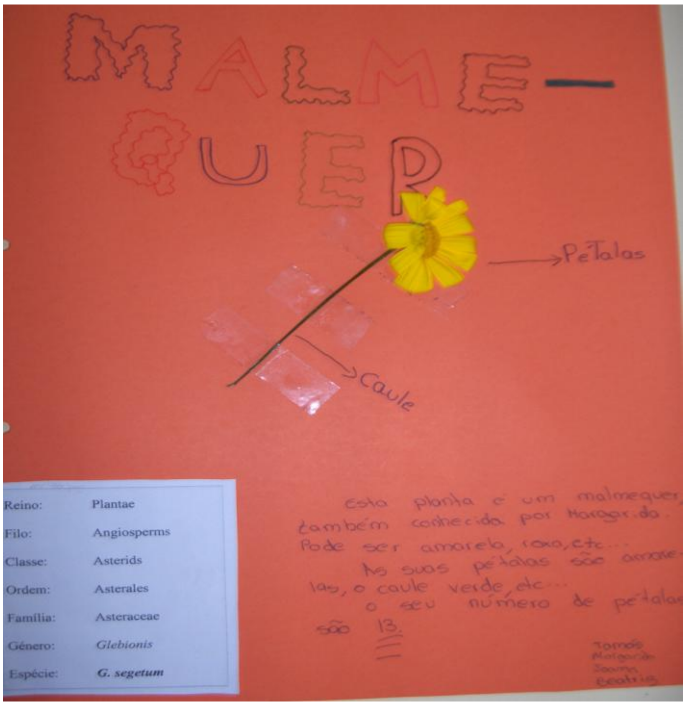


Foto18 – Produto final do malmequer.

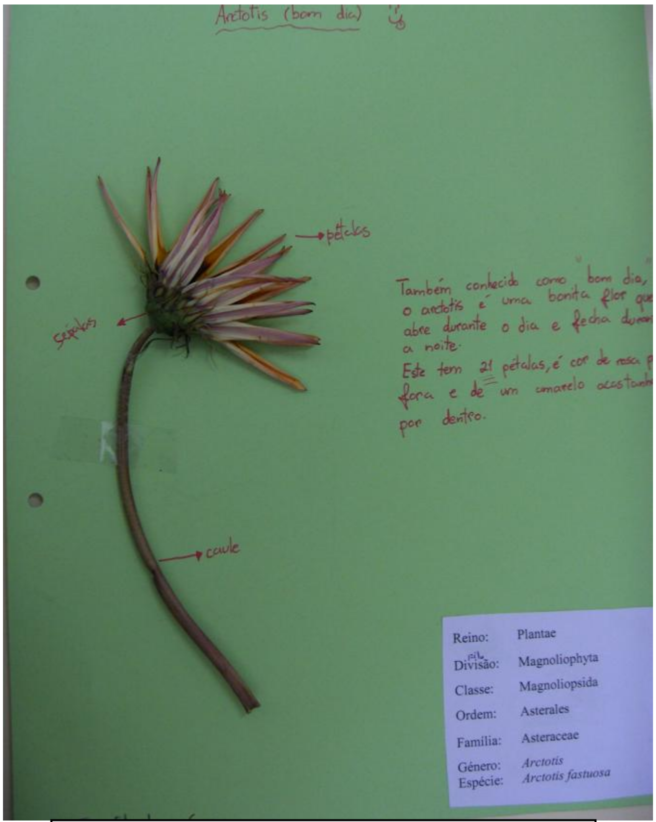


Foto19 – Produto final do arctotis.

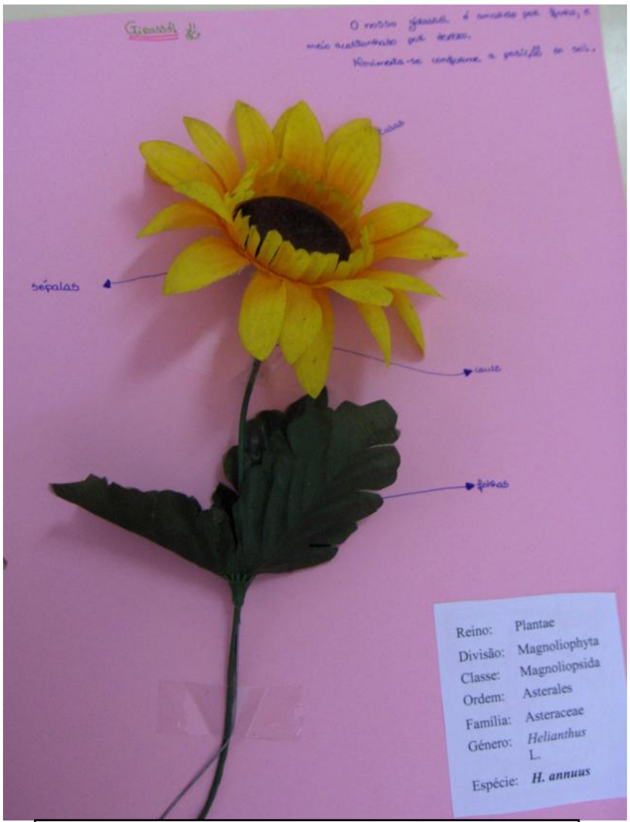
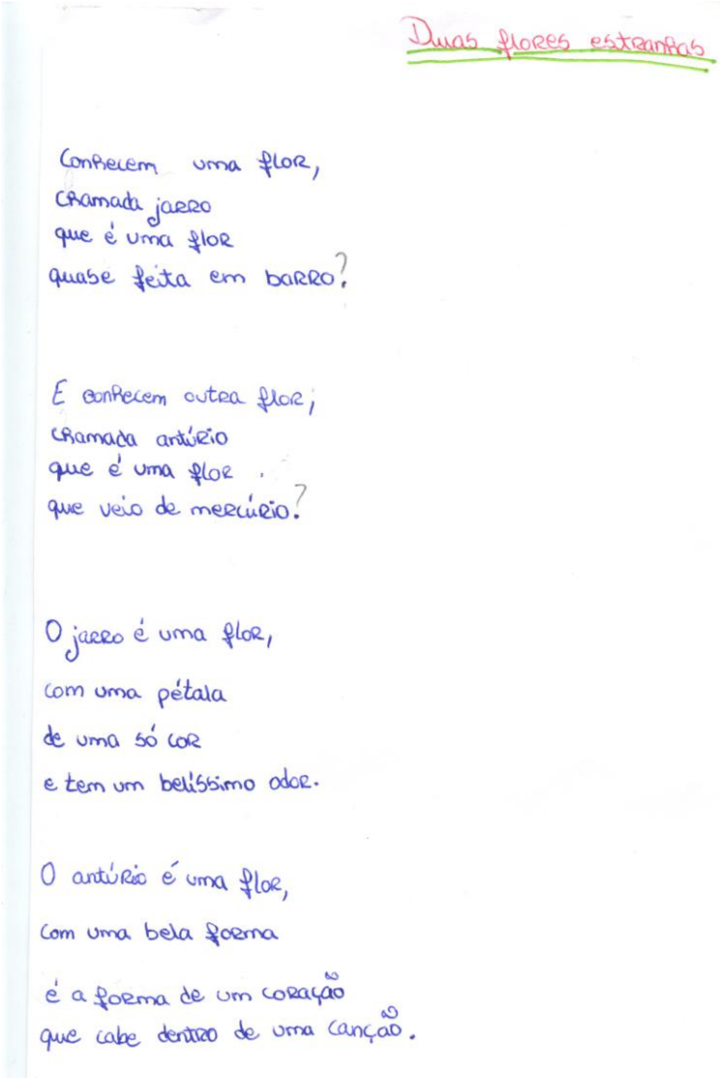


Foto 20 – Produto final do girassol.

c) Poemas sobre as flores abordadas, para o "Herbário de Fibonacci em verso".



Duas flores estranhas

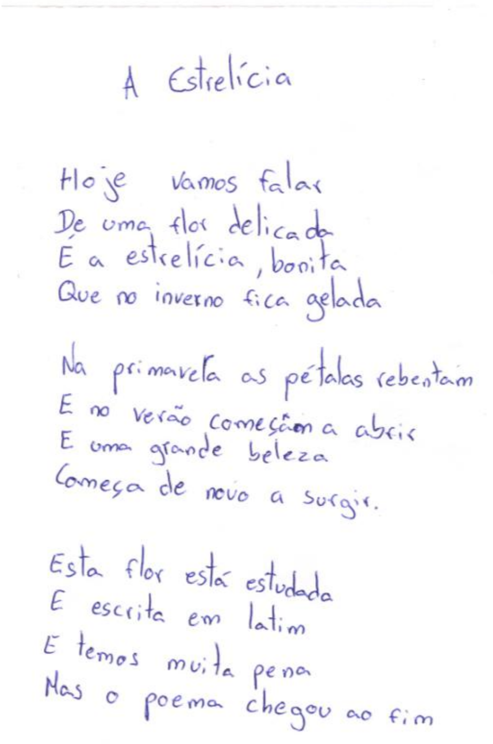
Conhecem uma flor,
chamada jarro
que é uma flor
quase feita em barro?

E conhecem outra flor,
chamada antúrio
que é uma flor
que veio de mercúrio?

O jarro é uma flor,
com uma pétala
de uma só cor
e tem um belíssimo odor.

O antúrio é uma flor,
com uma bela forma
é a forma de um coração
que cabe dentro de uma canção.

Imagem 21 – Poema sobre o jarro e o antúrio.



A Estrelícia

Hoje vamos falar
De uma flor delicada
É a estrelícia, bonita
Que no inverno fica gelada

Na primavera as pétalas rebentam
E no verão começam a abrir
E uma grande beleza
Começa de novo a surgir.

Esta flor está estudada
E escrita em latim
E temos muita pena
Mas o poema chegou ao fim

Imagem 22 – Poema sobre a estrelícia.

O herbário – Lírio

Os Lírios Tem várias cores:
Podem ser amarelos,
Podem ser roxos
E por isso são muito belos!

Lírio tem várias cores,
Iris é o seu género
Roxos podem ser estas flores
Iridacea é a sua família
Os lírios são encantadores!

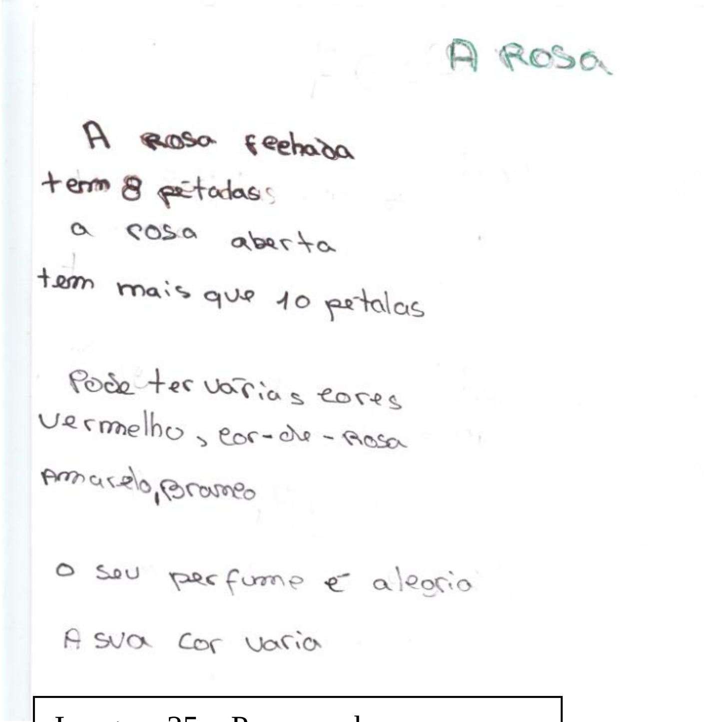
Imagem 23 – Poema sobre o lírio.

Alecrim do Norte

Alecrim, alecrim,
cheira bem como o pudim!
Se alguém o cheirar,
Vai querer comprár!

Alecrim, alecrim,
flores brancas como a neve!
Serve para temperar,
a comida do jantar!

Imagem 24 – Poema sobre o alecrim do norte.

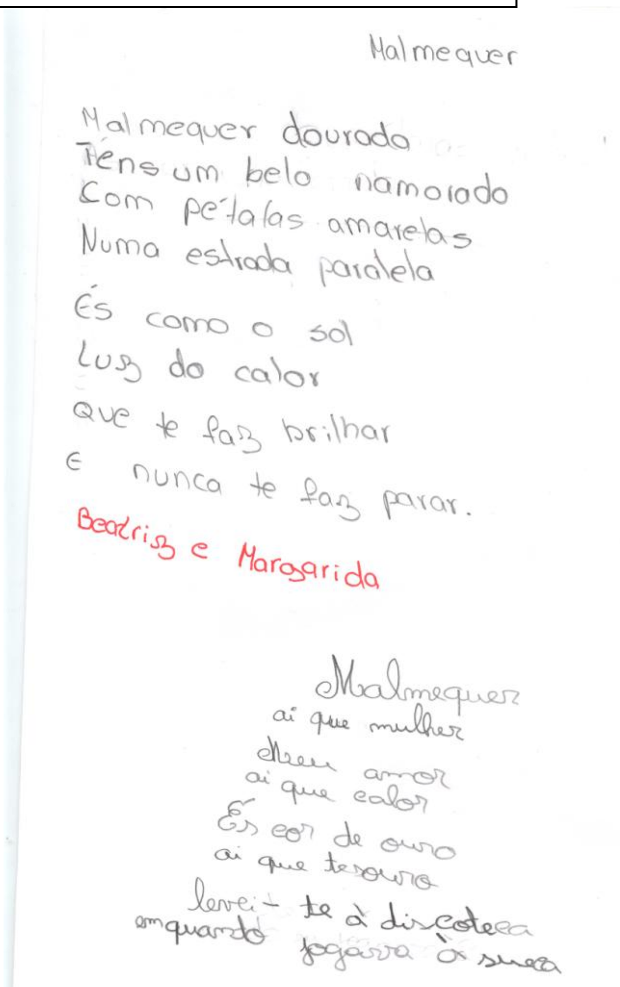

A Rosa

A rosa fechada
tem 8 pétalas
a rosa aberta
tem mais que 10 petalas

Pode ter várias cores
vermelho, cor-de-rosa
amarelo, branco

o seu perfume é alegria
A sua cor varia

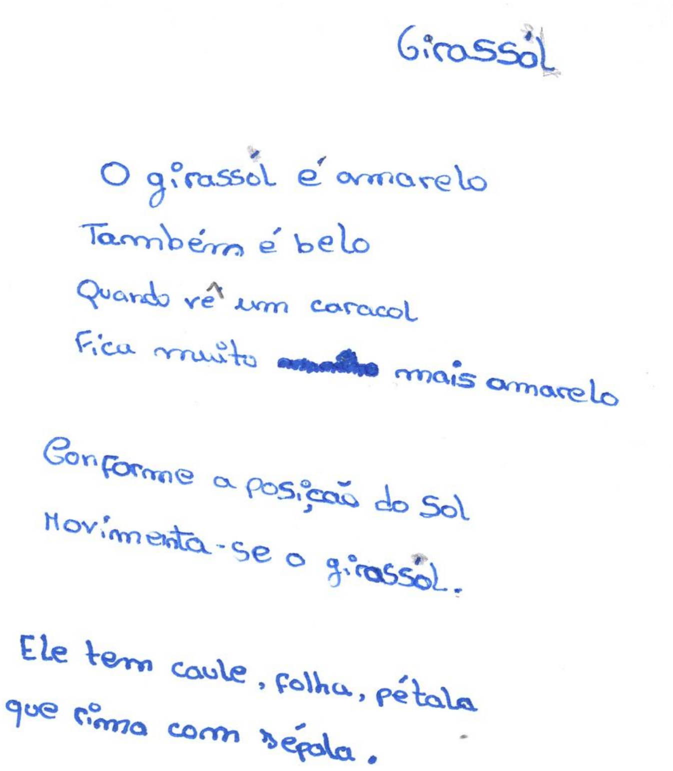
Imagem 25 – Poema sobre a rosa.


Malmequer

Malmequer dourado
Tens um belo namorado
Com pétalas amarelas
Numa estrada paralela
És como o sol
Luz do calor
que te faz brilhar
e nunca te faz parar.
Beatriz e Margarida

Malmequer
ai que mulher
Meu amor
ai que calor
És cor de ouro
ai que tesouro
levei-te à discoteca
enquanto jogava à sueca

Imagem 26 – Poema sobre o malmequer.



Girassol

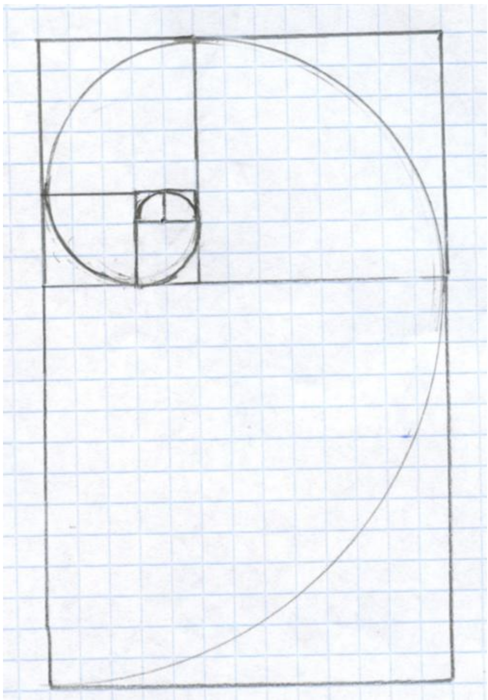
O girassol é amarelo
Também é belo
Quando vê um caracol
Fica muito mais amarelo

Conforme a posição do Sol
Movimenta-se o girassol.

Ele tem caule, folha, pétala
que rima com sépala.

Imagem 27 – Poema sobre o girassol.

d) Digitalização de uma construção da espiral na folha quadriculada, de um aluno:



e) Construção da espiral de Fibonacci nas cartolinas:

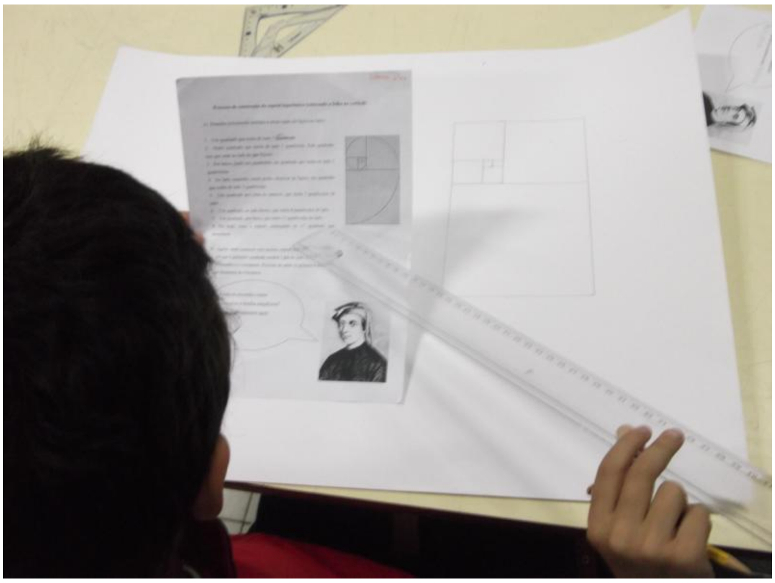


Foto 28 – Aluno a seguir as instruções para a construção da espiral.

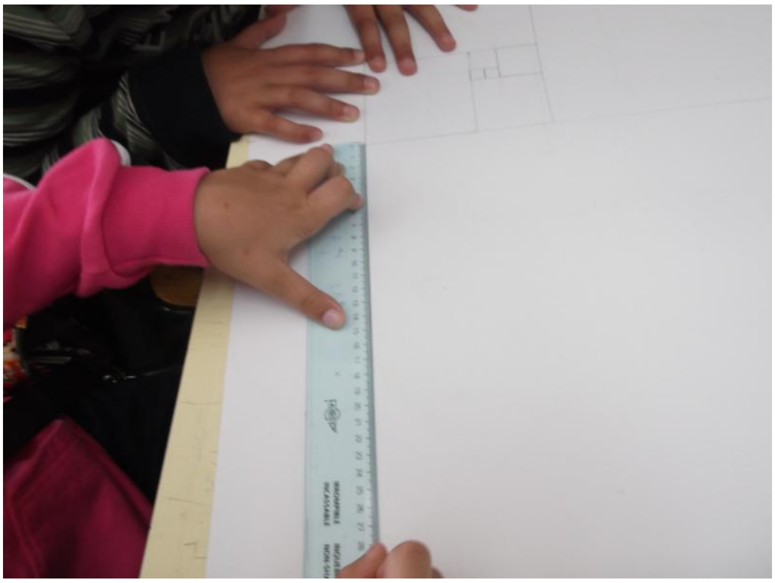


Foto 29 – Construção dos quadrados adjacentes, segundo a sequência de Fibonacci.

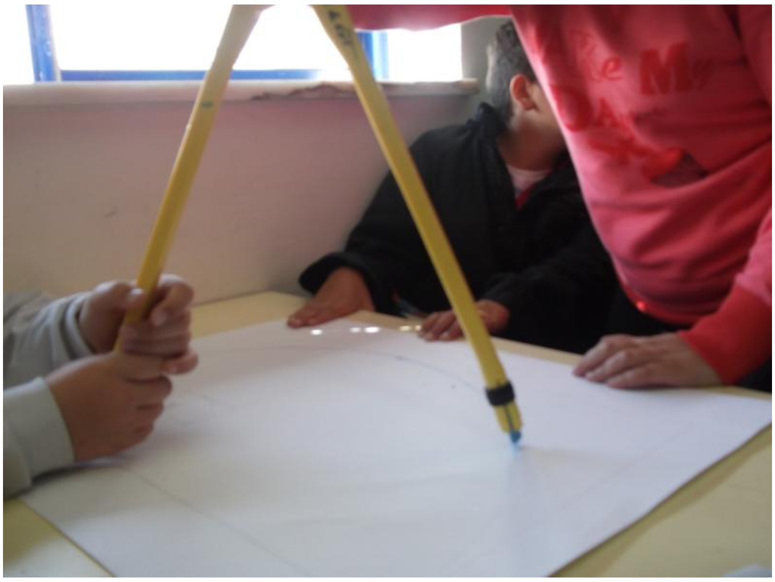


Foto 30 – Construção da espiral usando o compasso grande.

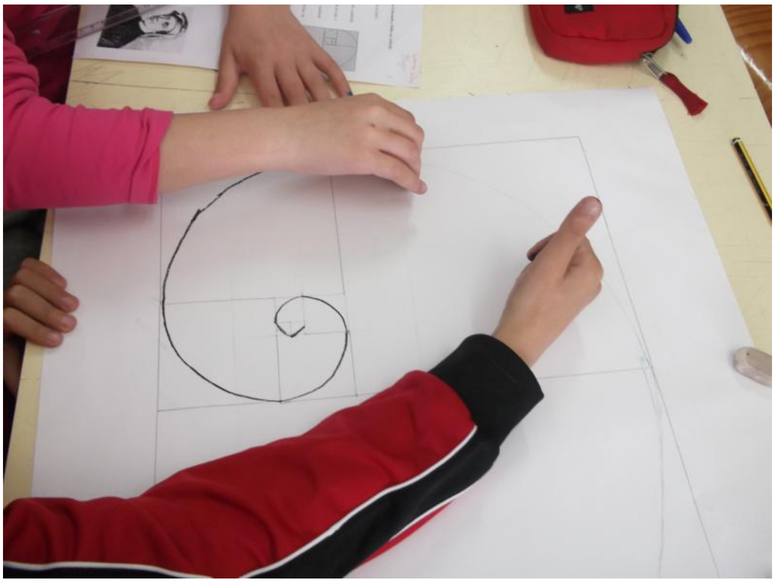


Foto 31 – Desenho da espiral com carvão.

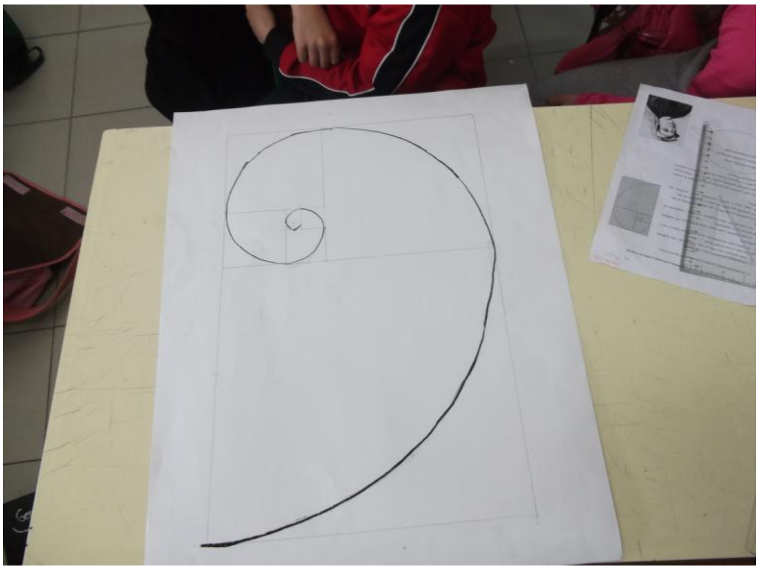


Foto 32 – Desenho final da espiral com carvão.

Foto 33 – Ordenamento das figuras na espiral.

Foto 34 – Ordenamento das figuras, por ordem decrescente.

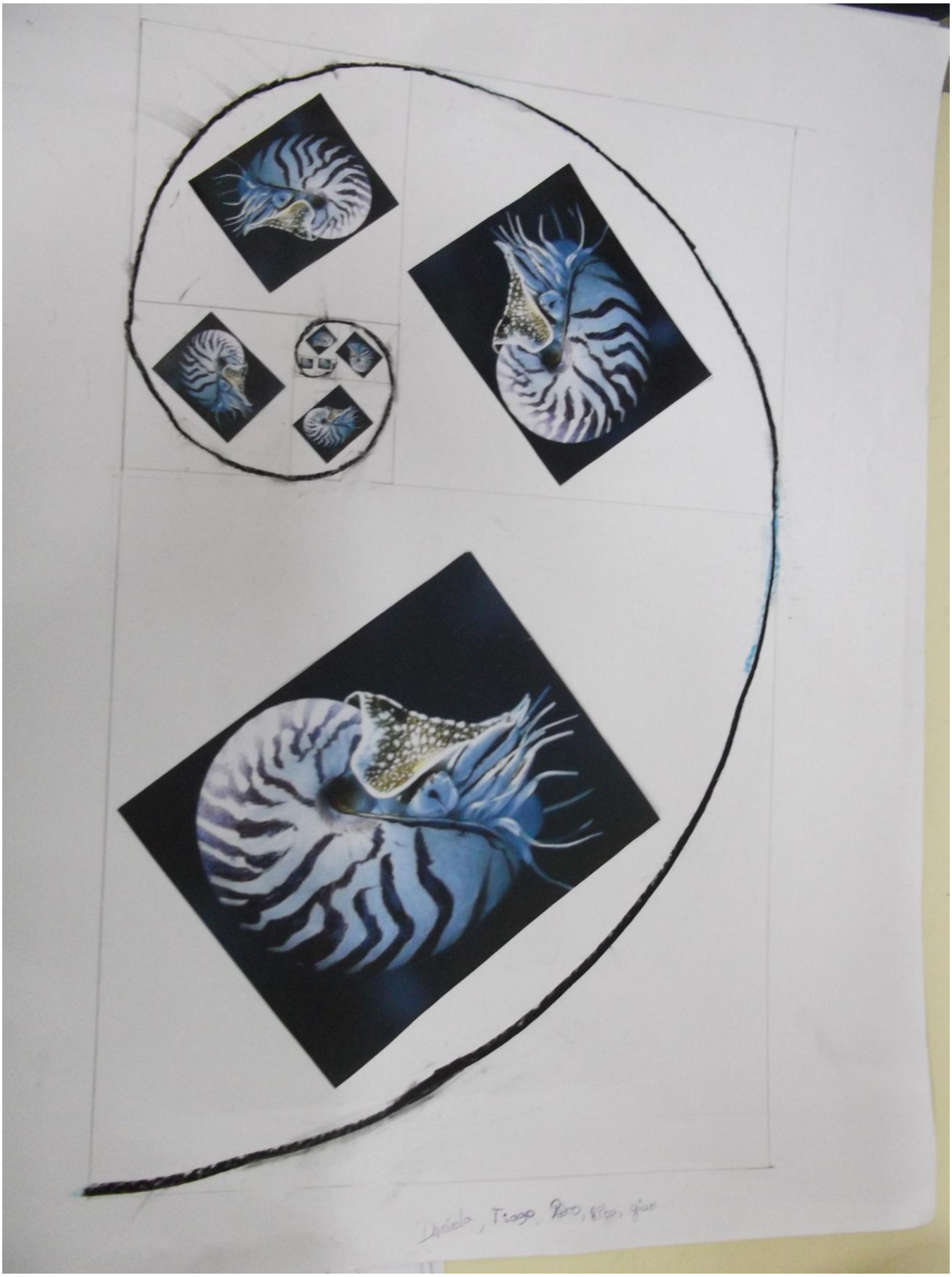


Foto 35 – Resultado final da espiral de náutilos.

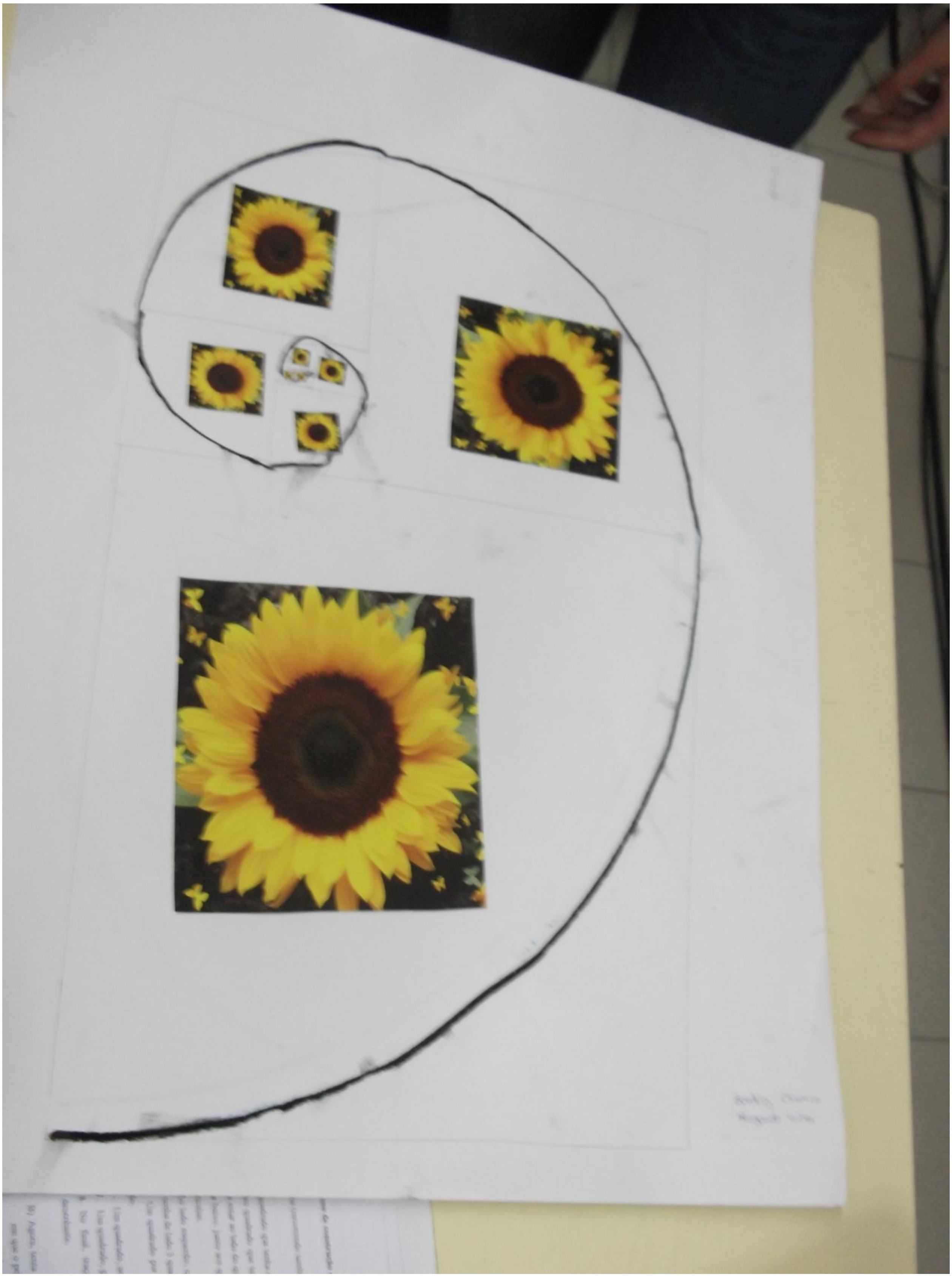


Foto 36 – Resultado final da espiral de girassóis.

Foto 37 – Resultado final da espiral de focas.

Foto 38 – Resultado final da espiral de borboletas.

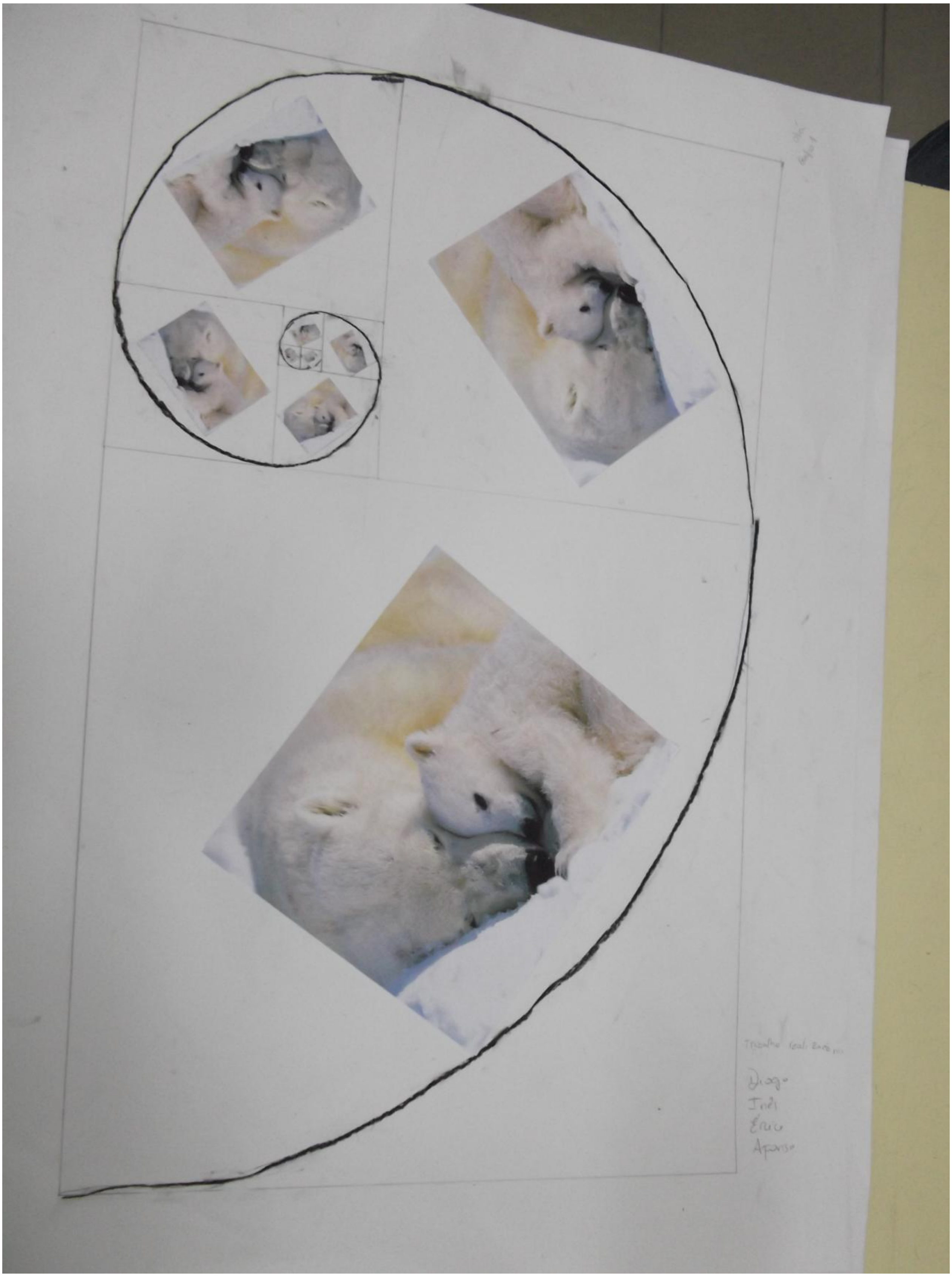


Foto 39 – Resultado final da espiral de ursos polares.

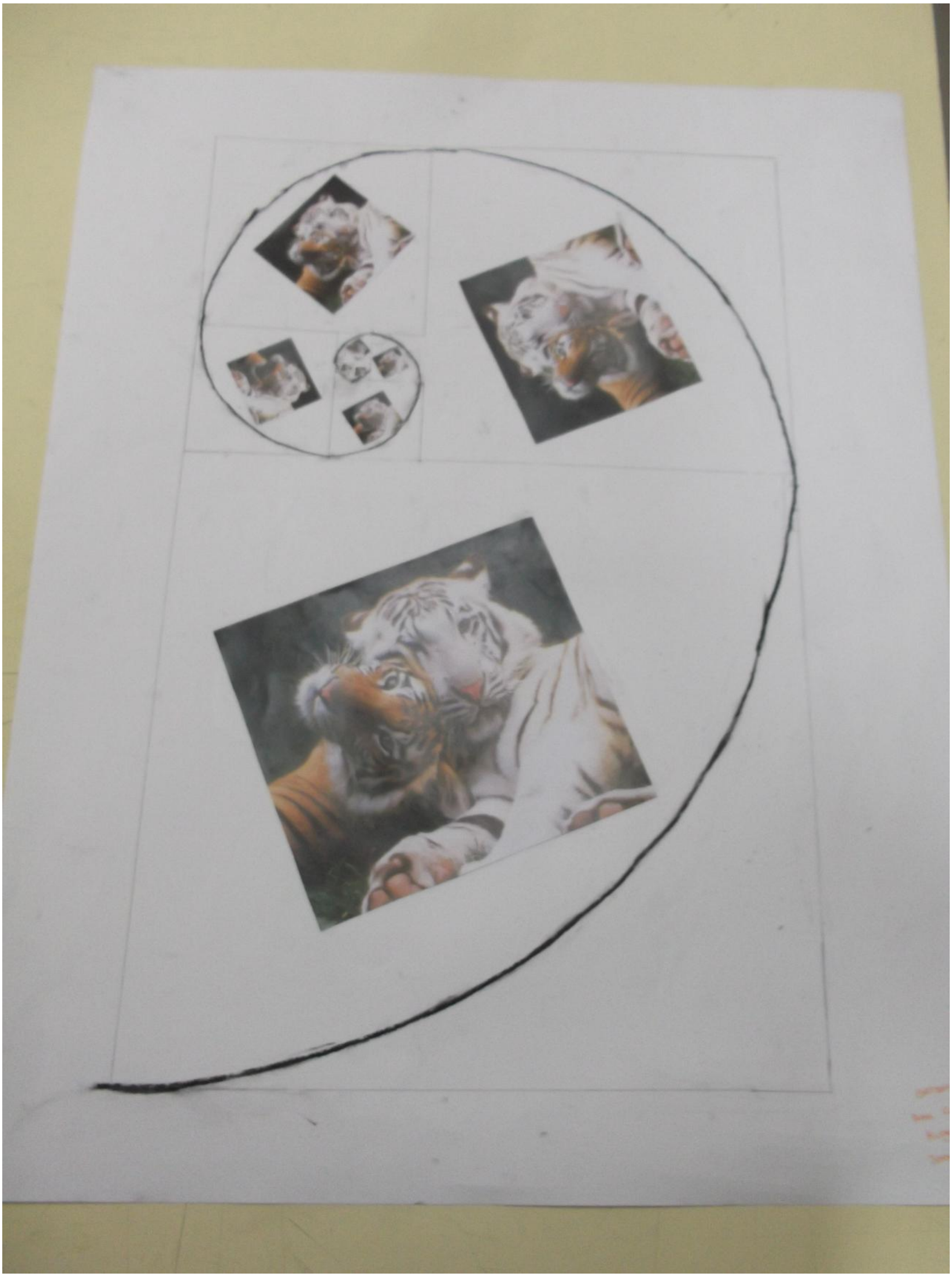


Foto 40 – Resultado final da espiral de tigres.

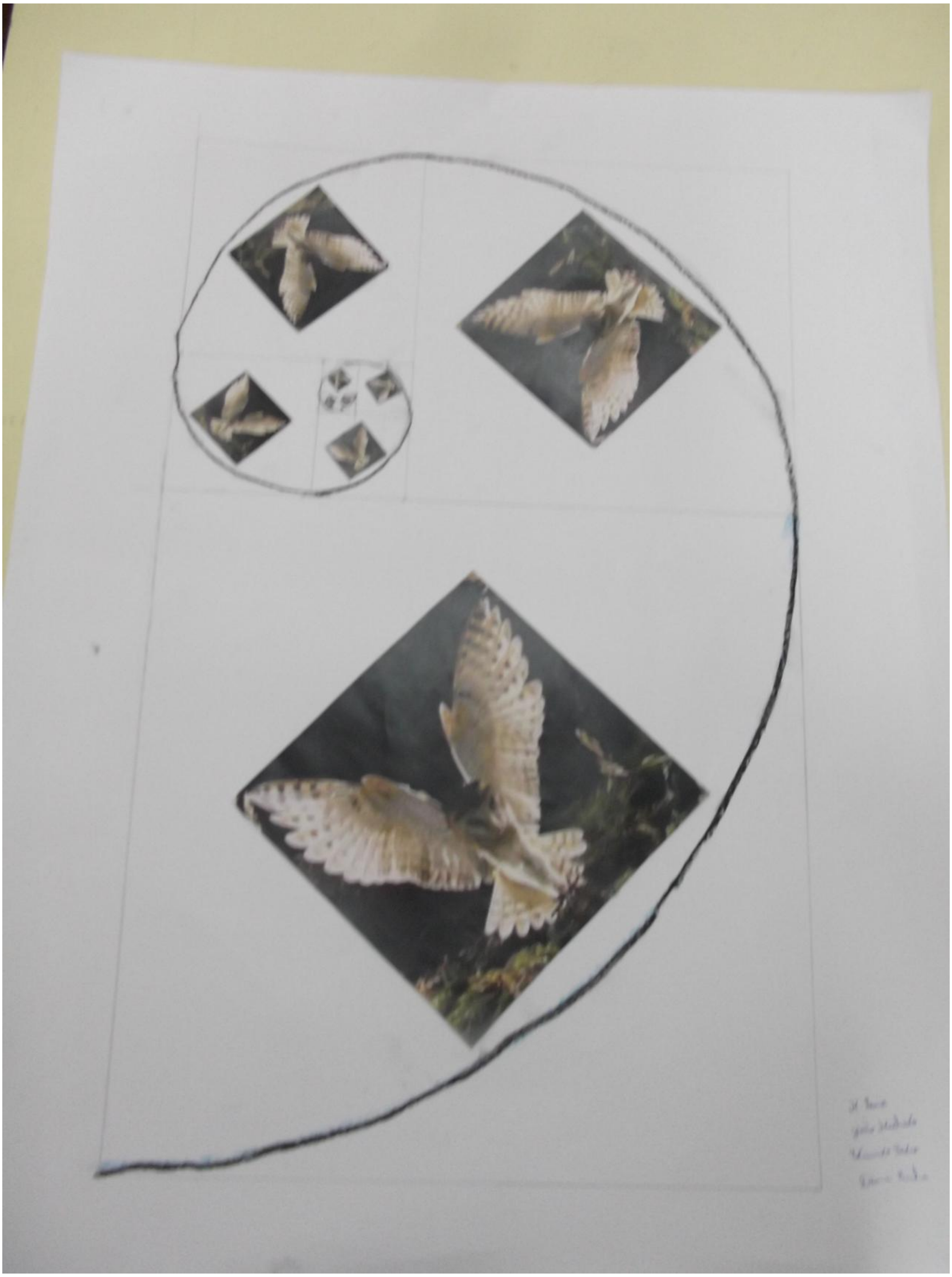


Foto 41 – Resultado final da espiral de corujas.

Anexo

Anexo - Guião de observação de aulas (adaptado de Ana Barbosa, 2009).

Data: Tarefa:

Descrição da sessão:

Questões da investigadora:

Reacções dos alunos à tarefa:

Estratégias utilizadas:

Dificuldades sentidas:

Episódios marcantes durante a sessão:

Reflexão após a sessão: